1

Opérateurs bornés sur un espace de Banach

Tout au long de ce cours, X et Y dénotent deux espaces de Banach complexes non réduits à zéro.

1.1. Espace des opérateurs bornés

Proposition 1.1.1. *Soit $T : X \to Y$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est continue sur X ;*

(ii) *T est continue en 0 ;*

(iii) *Il existe un réel $c \geq 0$ tel que $||Tx|| \leq c||x||$ pour tout $x \in X$.*

Preuve. Il est évident que (i) implique (ii).

(ii)⇒(iii). Pour $\varepsilon = 1$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $||x|| \leq \delta$ on ait $||Tx|| \leq 1$. Soit $x \in X \setminus \{0\}$, alors pour $c = 1/\delta$ on a $||\frac{1}{c||x||}x|| = \delta$, et donc $||T(\frac{1}{c||x||}x)|| = \frac{||Tx||}{c||x||} \leq 1$. D'où le résultat.

(iii)⇒(i). Soient $y \in X$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\|T(x-y)\| \leq c\|x-y\|$ pour tout $x \in X$, alors il suffit de prendre $\delta = \varepsilon/c$ pour avoir $\|T(x-y)\| \leq \varepsilon$ dès que $\|x-y\| \leq \delta$. $\square$

Toute application linéaire vérifiant l'une des assertions du théorème précédent est dite *opérateur borné*. La norme d'un tel opérateur T est définie par

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}. \tag{1.1}$$

Il est facile de vérifier que :

1. $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ pour tout $x \in X$.

2. $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = \sup\{\|Tx\|/\|x\| : x \neq 0\}$.

3. $\|T\|$ est la plus petite constante c vérifiant (iii) du théorème précédent.

On note par $\mathcal{B}(X, Y)$ l'ensemble de tous les opérateurs bornés de X dans Y. Lorsque $X = Y$, on note simplement $\mathcal{B}(X)$.

Proposition 1.1.2. *Les assertions suivantes sont satisfaites :*

(i) *Si* $T, S \in \mathcal{B}(X, Y)$ *alors* $T + S \in \mathcal{B}(X, Y)$ *et* $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$.

(ii) *Si* $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ *et* $\alpha \in \mathbb{C}$ *alors* $\alpha T \in \mathcal{B}(X, Y)$ *et* $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$.

(iii) *Soit* Z *un espace de Banach complexe. Si* $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ *et* $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$ *alors* $ST \in \mathcal{B}(X, Z)$ *et* $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

Preuve. (i) Pour tout $x \in X$, on a

$$\|(T + S)x\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq (\|T\| + \|S\|)\|x\|,$$

et donc $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$.

(ii) On a

$$\begin{aligned} \|\alpha T\| &= \sup\{\|\alpha Tx\| : \|x\| = 1\} \\ &= |\alpha| \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} \\ &= |\alpha|\|T\|. \end{aligned}$$

(iii) Pour tout $x \in X$, on a

$$\|STx\| \leq \|S\|\|Tx\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|,$$

ainsi $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$. $\square$

Théorème 1.1.3. *L'application* $T \mapsto \|T\|$ *est une norme pour laquelle* $\mathcal{B}(X, Y)$ *est un espace de Banach complexe. En particulier,* $\mathcal{B}(X)$ *est une algèbre de Banach unitaire.*

Preuve. D'après la proposition précédente, $(\mathcal{B}(X, Y), \|.\|)$ est un espace vectoriel normé. Il reste à montrer qu'il est complet.

Soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}(X)$. Alors, pour tout $x \in X$, la suite $(T_n x)_n$ est de Cauchy dans Y, et donc elle converge vers un vecteur de Y que l'on note Tx. On définit ainsi une application $T : X \to Y$ par $Tx = \lim_n T_n x$. Évidement, c'est une application linéaire. Puisque toute suite de Cauchy est bornée, il existe $c > 0$ tel que $\|T_n\| \leq c$, et donc $\|T_n x\| \leq c\|x\|$ pour tous $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, on trouve que T est borné. Maintenant, soit $\varepsilon > 0$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_p - T_q\| \leq \varepsilon$ dès que

$p \geq q \geq N$. Il vient donc que $\|T_p x - T_q x\| \leq \varepsilon \|x\|$ pour tous $p \geq q \geq N$. En faisant tendre p vers l'infini, on obtient $\|T_p - T\| \leq \varepsilon$ dès que $p \geq N$. D'où la résultat. $\square$

Exemple 1.1.4. 1. Considérons les applications linéaires $S_d, S_g : l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$ définies, pour tout $(x_n)_n \in l_2(\mathbb{C})$, par

$$S_d(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$$

et

$$S_g(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots).$$

Alors S_d (resp. S_g) est un opérateur borné appelé *shift unilatéral à droite* (resp. *gauche*), et on a $\|S_d\| = \|S_g\| = 1$.

Exemple 1.1.4. 1. Considérons les applications linéaires $S_d, S_g : l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$ définies, pour tout $(x_n)_n \in l_2(\mathbb{C})$, par

$$S_d(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$$

et

$$S_g(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots).$$

Alors S_d (resp. S_g) est un opérateur borné appelé *shift unilatéral à droite* (resp. *gauche*), et on a $\|S_d\| = \|S_g\| = 1$.

2. Soient $\{e_n\}_n$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert H et $(\alpha_n)_n$ une suite de nombres complexes bornée. On considère l'opérateur *diagonal* $D : H \to H$ donné par $De_n = \alpha_n e_n$. Alors D est borné et $\|D\| = \sup_n |\alpha_n|$.

3. Considérons l'espace de Banach E des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Étant donné $t_0 \in [0,1]$, l'opérateur $T : E \to E$ défini par $Tf(t) = f(t_0)$, pour tout $t \in [0,1]$, est borné et $\|T\| = 1$.

On note par B_X la boule unité fermée de X, et par $\mathrm{B}_X(x,r)$ la boule ouverte de X de centre x et rayon r.

Théorème 1.1.5 (Théorème de l'application ouverte). *Soit $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est surjective ;*

(ii) $0 \in \overset{\circ}{\overline{T\mathrm{B}_X}}$;

(iii) $0 \in T\overset{\circ}{\mathrm{B}}_X$.

Preuve. (i)⇒(ii) Comme T est surjectif, on a $Y = \cup_{n>0} nT\mathrm{B}_X = \cup_{n>0}\overline{nT\mathrm{B}_X}$. L'espace Y étant complet, d'après le théorème de Bair, il existe $n > 0$ tel que $\overset{\circ}{\overline{nT\mathrm{B}_X}} \neq \emptyset$, et donc $\overset{\circ}{\overline{T\mathrm{B}_X}} \neq \emptyset$. Soient donc $y \in Y$ et $r > 0$ tels que $\mathrm{B}_Y(y,2r) \subseteq \overline{T\mathrm{B}_X}$. En particulier, $y \in \overline{TB_X}$ et par symétrie $-y \in \overline{TB_X}$. Il vient donc que

$$B_Y(0, 2r) = B_Y(y, 2r) + \{-y\} \subseteq \overline{TB_X} + \overline{TB_X} = 2\overline{TB_X},$$

car $\overline{TB_X}$ est convexe. D'où $B_Y(0, r) \subset \overline{TB_X}$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Il existe un réel $c > 0$ tel que $B_Y(0, 4c) \subseteq \overline{TB_X}$. Soit $y \in B_Y(0, c)$, on construit par récurrence une suite (x_n) d'éléments de X telle que pour tout n

$$\|x_n\| \leq 2^{-n-1} \quad \text{et} \quad \|y - T(x_1 + ... + x_n)\| \leq c2^{-n}.$$

Ceci est possible car il existe $x_1 \in X$ tel que $\|x_1\| \leq 1/4$ et $\|y - Tx_1\| \leq c/2$. Ensuite, si $x_1, ..., x_n$ ont été construits on remarque que $\|2^n y - 2^n T(x_1 + ... + x_n)\| \leq c$ et l'on obtient comme précédemment un $x_{n+1} \in X$ tel que

$$\|2^n x_{n+1}\| \leq 1/4 \quad \text{et} \quad \|2^n y - 2^n T(x_1 + ... + x_n) - 2^n T x_{n+1}\| \leq c/2.$$

Comme la série $\sum x_n$ est absolument convergente, par complétude de X elle converge vers un élément $x \in X$ vérifiant $\|x\| \leq 1/2$. De plus, par continuité de T on a $y = Tx$. Donc $\mathrm{B}_Y(0,c) \subseteq \frac{1}{2}T\mathrm{B}_X \subseteq T\mathrm{B}_X$.

(iii)⇒(i) T est une application ouverte. En effet, il existe un réel $c > 0$ tel que $\mathrm{B}_Y(0,c) \subseteq T\mathrm{B}_X$. Soient Ω un ouvert non vide de X et $y \in T(\Omega)$. Alors $y = Tx$ avec $x \in \Omega$, et donc il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}_X(x,r) \subseteq \Omega$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_Y(y,cr) &= r\mathrm{B}_Y(0,c) + \{Tx\} \\ &\subseteq T\mathrm{B}_X(0,r) + \{Tx\} = T\mathrm{B}_X(x,r) \\ &\subseteq T(\Omega) \end{aligned}$$

D'où $T(\Omega)$ est un ouvert. En particulier, TX est un sous-espace ouvert de Y, il existe donc $a > 0$ tel que $\mathrm{B}_Y(0,a) \subseteq TX$. Par suite, pour tout $z \in Y$ non nul, on a $\frac{a}{2\|z\|}z \in \mathrm{B}_Y(0,a) \subseteq TX$. Ceci signifie que $Y = TX$. □

Corollaire 1.1.6. *Si $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ est bijectif alors $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$.*

Preuve. Il est facile de vérifier que T^{-1} est linéaire. Soit $c > 0$ tel que $\mathrm{B}_Y(0, c) \subseteq T\mathrm{B}_X$. Comme T est bijectif, on a $T^{-1}\mathrm{B}_Y(0, c) \subseteq \mathrm{B}_X$, et donc $T^{-1}\mathrm{B}_Y$ est borné. $\square$

Théorème 1.1.7 (Théorème du graphe fermé). *Soit* $T : X \to Y$ *une application linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est borné ;*

(ii) $G(T) := \{(x, Tx) : x \in X\}$ *est un sous-ensemble fermé dans* $X \times Y$ *;*

(iii) *Si* (x_n) *est une suite convergeant vers zéro et* (Tx_n) *converge vers* $y \in Y$*, alors* $y = 0$.

Preuve. Notons $P_1 : X \times Y \to X$ et $P_2 : X \times Y \to Y$ les projections canoniques, ce sont des opérateurs bornés.

(i)$\Rightarrow$(ii) On a $G(T) = \{z \in X \times Y : P_2(z) = TP_1(z)\}$ est un sous-ensemble fermé dans $X \times Y$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Si (x_n) est une suite convergeant vers zéro et (Tx_n) converge vers $y \in Y$, alors (x_n, Tx_n) converge vers $(0, y)$ donc $y = T0 = 0$.

(iii)$\Rightarrow$(i) est évidente. $\square$

Théorème 1.1.8 (Théorème de Banach-Steinhaus). *Soit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ une famille non vide. Si pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{Tx : T \in \mathcal{F}\}$ est borné, alors $\mathcal{F}$ est borné.*

Pour ce théorème classique qui découle du lemme de Bair, on présente une nouvelle démonstration élémentaire fournie par Alan Sokal (2010).

Lemme 1.1.9. *Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Pour tous $x \in X$ et $r > 0$, on a*

$$r\|T\| \leq \sup\{\|Ty\| : y \in \mathrm{B}_X(x, r)\}.$$

Preuve. Pour tout $z \in \mathrm{B}_X(0, r)$, on a

$$\begin{aligned} \|Tz\| &\leq 1/2(\|T(x+z)\| + \|T(x-z)\|) \\ &\leq \max\{\|T(x+z)\|, \|T(x-z)\|\} \\ &\leq \sup\{\|Ty\| : y \in \mathrm{B}_X(x, r)\} \end{aligned}$$

D'où, $r\|T\| \leq \sup\{\|Ty\| : y \in \mathrm{B}_X(x, r)\}$. □

Preuve du Théorème 1.1.8. Supposons que $\mathcal{F}$ n'est pas borné, et soit (T_n) une suite de $\mathcal{F}$ telle que $\|T_n\| \geq 4^n$. Il en résulte qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de X vérifiant

$$x_0 = 0, \quad \|x_n - x_{n-1}\| \leq 1/3^n$$

et

$$2/3^{n+1}\|T_n\| \leq \|T_n x_n\| \text{ pour tout } n \geq 1.$$

En effet, pour tout $n \geq 1$, le lemme précédent implique

$$2/3^{n+1}\|T_n\| < 1/3^n\|T_n\| \leq \sup\{\|T_n y\| : y \in \mathrm{B}_X(x_{n-1}, 1/3^n)\}.$$

Par conséquent, il existe $x_n \in \mathrm{B}_X(x_{n-1}, 1/3^n)$ tel que

$$2/3^{n+1}\|T_n\| \leq \|T_n x_n\|.$$

D'autre part, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \geq n$, on a

$$\|x_m - x_n\| \leq 1/3^m + 1/3^{m-1} + \cdots + 1/3^{n+1} \leq 1/(2.3^n).$$

En particulier, la suite (x_n) est de Cauchy, et donc elle converge vers un vecteur $x \in X$. En faisant tendre m vers l'infini, on obtient $\|x - x_n\| \leq 1/(2.3^n)$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
\|T_n x\| &\geq \|T_n x_n\| - \|T_n(x - x_n)\| \geq 2/3^{n+1}\|T_n\| - \|T_n\|\|x - x_n\| \\
&\geq 2/3^{n+1}\|T_n\| - 1/(2.3^n)\|T_n\| = \|T_n\|/(6.3^n) \\
&\geq (1/6).(4/3)^n.
\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que l'ensemble $\{Tx : T \in \mathcal{F}\}$ n'est pas borné, contradiction. $\square$

1.2. Adjoint d'un opérateur borné

On note par $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ le dual topologique de X. Soit $T : X \to Y$ un opérateur borné, on appelle *adjoint* de T, l'application $T^* : Y^* \to X^*$ défini par $T^*(f) = f \circ T$ pour tout $f \in Y^*$.

Proposition 1.2.1. *Soit $T : X \to Y$ un opérateur borné. Alors $T^* : Y^* \to X^*$ est un opérateur borné et $\|T^*\| = \|T\|$.*

Preuve. Pour tout $f \in Y^*$, on a

$$\|T^*(f)\| = \|f \circ T\| \leq \|f\|\|T\|,$$

et donc T^* est borné et $\|T^*\| \leq \|T\|$. Pour tout $x \in X$, on a

$$\|Tx\| = \sup_{f \in Y^*, \|f\| \leq 1} |f(Tx)| = \sup_{f \in Y^*, \|f\| \leq 1} |T^*(f)x| \leq \|T^*\|\|x\|,$$

et par conséquent $\|T\| \leq \|T^*\|$. $\square$

Proposition 1.2.2. *Soient $T, S \in \mathcal{B}(X, Y)$.*

(i) *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a $(\alpha T + \beta S)^* = \alpha T^* + \beta S^*$.*

(ii) *Si Z est un espace de Banach et $R \in \mathcal{B}(Y, Z)$, alors $(RT)^* = T^* R^*$.*

(iii) *Si T est inversible alors T^* l'est aussi et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

(iv) *L'opérateur T^{**} est une extension de T, i.e. $\mathrm{J}_{\mathrm{o}Y}^{-1} T^{**} \mathrm{J}_X = T$ où $\mathrm{J}_X : X \to X^{**}$ est l'isométrie canonique et $\mathrm{J}_{\mathrm{o}Y} : Y \to \mathrm{R}(\mathrm{J}_Y)$ est l'isomorphisme induit par J_Y.*

Preuve. Les trois premières assertions sont faciles à prouver.

(iv) Soient $\mathrm{J}_X : X \to X^{**}$ et $\mathrm{J}_Y : Y \to Y^{**}$ les isométries canoniques. Pour tous $x \in X$ et $f \in X^*$, on a

$$T^{**}(\mathrm{J}_X(x))f = (\mathrm{J}_X(x) \circ T^*)f = (T^* f)x = f(Tx) = \mathrm{J}_Y(Tx)f.$$

D'où, $T^{**}\mathrm{J}_X = \mathrm{J}_Y T$, et par suite $\mathrm{J}_{\mathrm{o}Y}^{-1} T^{**}\mathrm{J}_X = T$. $\square$

Exemple 1.2.3. Soient $f \in X^*$ et $z \in X$ non nuls. Considérons l'application linéaire $T : X \to X$ définie par $Tx = f(x)z$ pour tout $x \in X$. Alors T est un opérateur borné de norme $\|T\| = \|f\|\|z\|$, et on note simplement $T = z \otimes f$. De plus, on a $T^* = f \otimes \mathrm{J}_z$ où $\mathrm{J} : X \to X^{**}$ est l'injection canonique

1.3. Relations d'orthogonalité

Soient M et L des sous-ensembles de X et X^* respectivement. On défini l'*orthogonal* $M^\perp$ de M et l'orthogonal ${}^\perp L$ de L par

$$M^\perp = \{f \in X^* : f(x) = 0 \ \forall x \in M\}$$

et

$${}^\perp L = \{x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in L\}.$$

Pour toute application linéaire T, on note par $\mathrm{N}(T)$ son noyau. Remarquons que

$$M^\perp = \bigcap_{x\in M} \mathrm{N}(\varphi_x) \quad \text{et} \quad {}^\perp L = \bigcap_{f\in L} \mathrm{N}(f),$$

où $\varphi_x : f \in X^* \mapsto f(x)$ est une forme linéaire continue pour la topologie $*$-faible $\sigma(X^*, X)$. En particulier, $M^\perp$ et ${}^\perp L$ sont des sous-espaces fermés.

Pour tout sous-ensemble $A \subset X$, on note par $\mathrm{Vect}(A)$ le sous-espace engendré par A.

Proposition 1.3.1. *Soient M et L des sous-ensembles de X et X^* respectivement. Alors*

$$^\perp(M^\perp) = \overline{\mathrm{Vect}(M)} \quad et \quad (^\perp L)^\perp = \overline{\mathrm{Vect}(L)}^{\sigma(X^*,X)}.$$

Preuve. Montrons que $^\perp(M^\perp) = \overline{\mathrm{Vect}(M)}$. On a

$$^\perp(M^\perp) = \bigcap_{f \in M^\perp} \mathrm{N}(f) = \bigcap_{f \in X^*,\, M \subseteq \mathrm{N}(f)} \mathrm{N}(f),$$

et donc $\overline{\mathrm{Vect}(M)} \subseteq {}^\perp(M^\perp)$. Soit $x \in {}^\perp(M^\perp)$, si $x \notin \overline{\mathrm{Vect}(M)}$ alors il existe $\varphi \in X^*$ tel que $\varphi(x) \neq 0$ et $\varphi(y) = 0$ pour tout $y \in \overline{\mathrm{Vect}(M)}$. En particulier, on a $\varphi \in M^\perp$. Or $x \in {}^\perp(M^\perp)$, donc $\varphi(x) = 0$ ce qui est absurde.

Reste à montrer que $({}^{\perp}L)^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}(L)}^{\sigma(X^*,X)}$. On a

$$({}^{\perp}L)^{\perp} = \bigcap_{x \in {}^{\perp}L} \mathrm{N}(\varphi_x) = \bigcap_{x \in X,\, L \subseteq \mathrm{N}(\varphi_x)} \mathrm{N}(\varphi_x),$$

et par suite $\overline{\mathrm{Vect}(L)}^{\sigma(X^*,X)} \subseteq ({}^{\perp}L)^{\perp}$. Soit $\phi \in ({}^{\perp}L)^{\perp}$, si $\phi \notin \overline{\mathrm{Vect}(L)}^{\sigma(X^*,X)}$, alors il existe une forme linéaire g continue sur $(X^*, \sigma(X^*, X))$ telle que $g(\phi) \neq 0$ et $g(\psi) = 0$ pour tout $\psi \in \overline{\mathrm{Vect}(L)}^{\sigma(X^*,X)}$. En particulier, on trouve que $L \subseteq \mathrm{N}(g)$. D'autre part, il existe $u \in X$ tel que $g = \varphi_u$, et donc $g(\phi) = \phi(u) = 0$, une contradiction. $\square$

Remarque 1.3.2. Soient M_1 et M_2 deux sous-espaces de X, et L_1, L_2 deux sous-espaces de X^*. On a

(i) $(M_1 + M_2)^\perp = M_1^\perp \cap M_2^\perp$ et ${}^\perp(L_1 + L_2) = {}^\perp L_1 \cap {}^\perp L_2$.

(ii) Si $M_1 \subseteq M_2$ alors $M_2^\perp \subseteq M_1^\perp$; et si $L_1 \subseteq L_2$ alors ${}^\perp L_2 \subseteq {}^\perp L_1$.

Soient M un sous-espace fermé de X et $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. On note par $T_{|M}$ la restriction de T à M ; c'est un opérateur borné de M dans Y et $\|T_{|M}\| \leq \|T\|$. Lorsque $T \in \mathcal{B}(X)$ et $TM \subseteq M$, on dit que M est *T-invariant* ; dans ce cas $T_{|M} \in \mathcal{B}(M)$.

Proposition 1.3.3. *Soit M un sous-espace fermé de X, alors*

$$\dim M = \operatorname{codim} M^{\perp} \quad \textit{et} \quad \dim M^{\perp} = \operatorname{codim} M.$$

Preuve. L'opérateur $\Phi : X^* \to M^*$ défini par $\Phi(f) = f_{|M}$ est clairement borné et surjectif par le théorème de Hahn-Banach. De plus, on a $\mathrm{N}(\Phi) = M^{\perp}$. D'où $X^*/M^{\perp} \simeq M^*$, et donc

$$\dim M = \dim M^* = \operatorname{codim} M^{\perp}.$$

Considérons l'opérateur $\Psi : (X/M)^* \to M^{\perp}$ donné par $\Psi(f) = f \circ \pi$ où $\pi : X \to X/M$ est la surjection canonique. Clairement, Ψ est un opérateur borné et injectif. De plus, Ψ est surjectif par le diagramme de factorisation. D'où $(X/M)^* \simeq M^{\perp}$ et $\dim M^{\perp} = \operatorname{codim} M$. $\square$

Pour tout $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, on note par $\mathrm{R}(T)$ son image.

Proposition 1.3.4. *Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, alors*

(i) $\mathrm{N}(T^*) = \mathrm{R}(T)^\perp$ *et* ${}^\perp\mathrm{N}(T^*) = \overline{\mathrm{R}(T)}$.

(ii) $\mathrm{N}(T) = {}^\perp\mathrm{R}(T^*)$ *et* $\mathrm{N}(T)^\perp = \overline{\mathrm{R}(T^*)}^{\sigma(X^*,X)}$.

Preuve. (i) Soit $g \in Y^*$, alors

$$g \in \mathrm{N}(T^*) \Leftrightarrow T^*(g) = g \circ T = 0 \Leftrightarrow \mathrm{R}(T) \subseteq \mathrm{N}(g) \Leftrightarrow g \in \mathrm{R}(T)^\perp.$$

(ii) Soit $x \in X$, on a

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{N}(T) &\Leftrightarrow Tx = 0 \\ &\Leftrightarrow f(Tx) = T^*(f)x = 0 \text{ pour tout } f \in Y^* \\ &\Leftrightarrow x \in {}^\perp\mathrm{R}(T^*). \end{aligned}$$

□

1.4. Opérateurs bornés à image fermée

Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Si l'image $\mathrm{R}(T)$ est fermée, alors l'opérateur T induit un isomorphisme $\tilde{T} : X/\mathrm{N}(T) \to \mathrm{R}(T)$ par la formule

$$\tilde{T}(x + \mathrm{N}(T)) = Tx.$$

Proposition 1.4.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, s'il existe un sous-espace fermé M de Y tel que $\mathrm{R}(T) + M$ et $\mathrm{R}(T) \cap M$ soient fermés alors $\mathrm{R}(T)$ est fermé.*

Preuve. Posons $Z = \mathrm{R}(T) + M$ et $W = \mathrm{R}(T) \cap M$. Alors, M/W, $X/T^{-1}W$ et Z/W sont des espaces de Banach, et l'opérateur $\Phi : M/W \times X/T^{-1}W \to Z/W$ défini par

$$\Phi(m + W, x + T^{-1}W) = m + Tx + W$$

est bijectif. D'autre part, on a

$$\|m + Tx + W\| = \inf_{u \in W} \|m + Tx - u\| \leq \|m + Tx - y - Tz\|,$$

our tous $y \in W, z \in T^{-1}W$. Il vient donc

$$\begin{aligned} \|m + Tx + W\| &\leq \inf_{y \in W} \|m - y\| + \inf_{z \in T^{-1}W} \|T\|\|x - z\| \\ &\leq \|m + W\| + \|T\|\|x + T^{-1}W\| \\ &\leq \max(1, \|T\|)(\|m + W\| + \|x + T^{-1}W\|). \end{aligned}$$

D'où Φ est borné, et donc c'est un isomorphisme. On en déduit que

$$\Phi(\{0\} \times X/T^{-1}W) = (\mathrm{R}(T) + W)/W = \mathrm{R}(T)/W$$

est fermé, par suite $\mathrm{R}(T)$ est fermé aussi. □

Corollaire 1.4.2. *Soit* $T \in \mathcal{B}(X)$.

(i) *S'il existe un sous-espace de dimension finie* M *tel que* $\mathrm{R}(T) + M$ *soit fermé, alors* $\mathrm{R}(T)$ *est fermé.*

(ii) *S'il existe un sous-espace fermé de codimension finie* G *tel que* TG *soit fermé, alors* $\mathrm{R}(T)$ *est fermé.*

Preuve. (i) Comme M et $\mathrm{R}(T) \cap M$ sont de dimension finie, ils sont fermés, et le résultat découle de la proposition précédente.

(ii) Écrivons $X = G \oplus L$ où L est un sous-espace fermé de dimension finie. On a donc $\mathrm{R}(T) = TG + TL$ est fermé comme somme d'un sous-espace fermé et un autre de dimension finie. $\square$

Théorème 1.4.3 (Théorème de l'image fermée). *Soit $T : X \to Y$ un opérateur borné. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{R}(T)$ *est fermée,*

(ii) $\mathrm{R}(T^*)$ *est* $\sigma(X^*, X)$*-fermée,*

(iii) $\mathrm{R}(T^*)$ *est fermée.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Comme $\mathrm{N}(T)^\perp = \overline{\mathrm{R}(T^*)}^{\sigma(X^*,X)}$, il suffit de montrer que $\mathrm{N}(T)^\perp \subseteq \mathrm{R}(T^*)$. Soit $f \in \mathrm{N}(T)^\perp$ et notons par $\tilde{f} : X/\mathrm{N}(T) \to \mathbb{C}$ et $\tilde{T} : X/\mathrm{N}(T) \to \mathrm{R}(T)$ les applications induites respectivement par f et T. Comme $\mathrm{R}(T)$ est fermé, $\tilde{T}$ est un isomorphisme. En prolongeant la forme linéaire bornée $\tilde{f} \circ \tilde{T}^{-1} : \mathrm{R}(T) \to \mathbb{C}$ à une forme linéaire $g \in X^*$ on trouve que $\tilde{f} = g_{|\mathrm{R}(T)} \circ \tilde{T}$, et donc $f = g \circ T = T^*(g)$. D'où,

$f \in \mathrm{R}(T^*)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) est clair.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Posons $T_{\mathrm{o}} : X \to \overline{\mathrm{R}(T)}$ l'opérateur induit par T. C'est un opérateur borné et à image dense. Par prolongement et restriction des formes linéaires, il est facile de vérifier que $\mathrm{R}(T_{\mathrm{o}}^*) = \mathrm{R}(T^*)$. Ainsi, sans perte de généralité, on peut supposer que T est à image dense.

Comme $\mathrm{N}(T^*) = \mathrm{R}(T)^\perp = \overline{\mathrm{R}(T)}^\perp = \{0\}$ et $\mathrm{R}(T^*)$ est fermée, alors T^* induit un isomorphisme $T_{\mathrm{o}}^* : Y^* \to \mathrm{R}(T^*)$. Pour $c = \|T_{\mathrm{o}}^{*\,-1}\|^{-1}$, on a

$$\|T^* f\| \geq c\|f\| \quad \text{pour tout } f \in X^*.$$

Il est clair qu'il suffit d'établir que T est surjectif, ou encore par le Théorème de l'application ouverte, que $0 \in \overset{\circ}{\overline{TB_X}}$. Soit $y \in Y \setminus \overline{TB_X}$. Comme $\overline{TB_X}$ est un convexe fermé, le théorème de Hahn-Banach (forme géométrique) assure l'existence de $\varphi \in Y^*$ vérifiant

$$\sup_{x\in B_X} \operatorname{Re}\varphi(Tx) < \operatorname{Re}\varphi(y) \leq |\varphi(y)|.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\sup_{x\in B_X} \operatorname{Re}\varphi(Tx) &= \sup_{x\in B_X\setminus N(\varphi T)} \operatorname{Re}\varphi T\left(\frac{|\varphi(Tx)|}{\varphi(Tx)}x\right)\\ &= \sup_{x\in B_X} |\varphi(Tx)| = \|\varphi T\|.\end{aligned}$$

Il vient donc

$$c\|\varphi\| \leq \|\varphi T\| < |\varphi(y)| \leq \|\varphi\|\|y\|,$$

et par suite $c \leq \|y\|$. D'où, $B_Y(0, c) \subseteq \overline{TB_X}$. $\square$

Le corollaire suivant découle du théorème précédent.

Corollaire 1.4.4. *Soit $T : X \to Y$ un opérateur borné. Alors*

(i) *T est injectif à image fermée si, et seulement si, T^* est surjectif.*

(ii) *T est surjectif si, et seulement si, T^* est injectif à image fermée.*

(iii) *T est bijectif si, et seulement si, T^* est bijectif.*

Preuve. (i) Supposons T injectif à image fermée. Alors T^* est à image $\sigma(X^*, X)$-fermée et

$$X^* = \{0\}^\perp = \mathrm{N}(T)^\perp = \overline{\mathrm{R}(T^*)}^{\sigma(X^*,X)} = \mathrm{R}(T^*).$$

D'où T^* est surjectif. Réciproquement, si T^* est surjectif, alors $\mathrm{R}(T)$ est fermée et

$$\mathrm{N}(T) = {}^{\perp}\mathrm{R}(T^*) = {}^{\perp}X^* = \{0\}.$$

(ii) est similaire à (i).

(iii) résulte immédiatement de (i) et (ii). $\square$

Proposition 1.4.5. *Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est injectif à image fermée ;*

(ii) *Il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in X$.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Alors T induit un isomorphisme $T_\circ : X \to \mathrm{R}(T)$. Donc, en prenant $c = \|{T_\circ}^{-1}\|^{-1}$, on trouve l'inégalité voulue.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Clairement, T est injectif. Soit $(Tx_n)_n$ une suite dans $\mathrm{R}(T)$ convergeant vers un élément $y \in Y$. En particulier, $(Tx_n)_n$ est de Cauchy, et donc $(x_n)_n$ l'est aussi vu que $\|x_n\| \leq c^{-1}\|Tx_n\|$. Il vient que $(x_n)_n$ converge vers un élément $x \in X$, et par suite $(Tx_n)_n$ converge vers Tx. Cela implique que $y = Tx$, et donc $\mathrm{R}(T)$ est fermée. $\square$

1.5. Spectre d'un opérateur borné

L'identité de l'algèbre de Banach $\mathcal{B}(X)$ sera notée I_X, ou tout simplement I ou 1 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, et pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ on note $\alpha I = \alpha$. Notons aussi que $\|I\| = 1$ et $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ pour tous $T \in \mathcal{B}(X)$ et $n \geq 0$.

Définition 1.5.1. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. On dit que T est *inversible* s'il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $TS = ST = I$. Dans ce cas, l'opérateur S est unique et on le note par T^{-1}.

On note par $\mathrm{Inv}(X)$ l'ensemble de tous les opérateurs inversibles dans $\mathcal{B}(X)$.

Exemple 1.5.2. Soit $A \in \mathrm{Inv}(X)$ et considérons les deux opérateurs bornés L_A et R_A sur $\mathcal{B}(X)$ donnés par

$$\mathrm{L}_A(T) = AT \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_A(T) = TA \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{B}(X).$$

L'opérateur L_A (resp. R_A) est appelé *multiplication à gauche* (resp. *droite*) par A.

Alors L_A et R_A sont inversibles. De plus, on a $\mathrm{L}_A^{-1} = \mathrm{L}_{A^{-1}}$ et $\mathrm{R}_A^{-1} = \mathrm{R}_{A^{-1}}$.

Définition 1.5.3. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$.

(i) L'*ensemble résolvant* de T est défini par

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ est inversible }\}.$$

(ii) $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ est appelé le *spectre* de T.

(iii) Le *spectre ponctuel* de T est l'ensemble

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ n'est pas injectif }\}$$

des valeurs propres de T.

Remarque 1.5.4. Soient $T \in \mathcal{B}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors on a

(i) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) \subseteq \sigma(T)$, et on l'égalité lorsque X est de dimension finie.

(ii) $\sigma(\alpha I) = \{\alpha\}$ et $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.

(iii) $\sigma(T + \alpha I) = \sigma(T) + \alpha$ et $\sigma(\alpha T) = \alpha\sigma(T)$.

Exemple 1.5.5. 1. Soit $T = z \otimes f$ un opérateur de rang 1 où $z \in X$ et $f \in X^*$. Il est facile de vérifier que $\mathrm{R}(T) = \mathrm{Vect}\{z\}$ (d'où l'appellation de T) et $\mathrm{N}(T) = \mathrm{N}(f)$. Alors, on a

$$\sigma(T) = \{0, f(z)\}.$$

En effet, $0 \in \sigma(T)$ car T est de rang 1, et comme $(T - f(z))z = 0$ alors $f(z) \in \sigma(T)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Notons que si $\lambda \neq 0$, alors $\mathrm{N}(T - \lambda) \subseteq \mathrm{Vect}\{z\}$; et si de plus $\lambda \neq f(z)$, alors $T - \lambda$ est injectif. Dans ce cas, $T - \lambda$ est surjectif car pour tout $y \in X$ il existe $x = \frac{-1}{\lambda}(y - \frac{f(y)}{f(z)-\lambda} z)$ tel que $(T - \lambda)x = y$. D'où, $T - \lambda$ est bijectif dès que $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq f(z)$.

2. Soit $S \in \mathcal{B}(X)$ nilpotent d'indice de nilpotence $n \geq 2$, i.e. $S^n = 0$ et $S^{n-1} \neq 0$. Alors

$$\sigma(S) = \{0\}.$$

En effet, $0 \in \sigma(S)$ car S n'est pas inversible du fait que $S^n = 0$. Pour tout $\lambda \in C$ non nul, on a

$$\begin{aligned} 0 &= S^n = (S - \lambda + \lambda)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^{n-k} (S-\lambda)^k \\ &= \lambda^n + (S-\lambda) \sum_{k=1}^{n} C_n^k \lambda^{n-k} (S-\lambda)^{k-1}, \end{aligned}$$

et donc $(S-\lambda)^{-1} = -\lambda^{-n} \sum_{k=1}^{n} C_n^k \lambda^{n-k} (S-\lambda)^{k-1}$.

Proposition 1.5.6. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur tel que $\|T\| < 1$. Alors $I - T$ est inversible. En plus, on a*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \quad \textit{et} \quad \|(I-T)^{-1}\| \leq 1/(1-\|T\|).$$

Preuve. On a $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, par suite $\sum T^k$ est une série absolument convergente dans l'espace de Banach $\mathcal{B}(X)$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
(I-T)\sum_{k=0}^{\infty} T^k &= (I-T)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} T^k \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(I-T)T^k \\
&= \lim_{n\to\infty} I - T^{n+1} = I.
\end{aligned}$$

De même, on obtient $\left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right)(I-T) = I$. D'où, $(I-T)$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{n} T^k$.

Par majoration on obtient :

$$||(I-T)^{-1}|| = ||\sum_{k=0}^{\infty} T^k|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||T||^k = 1/(1-||T||).$$

$\square$

Corollaire 1.5.7. *L'ensemble* $\mathrm{Inv}(X)$ *des opérateurs inversibles de* $\mathcal{B}(X)$ *est un ouvert.*

Preuve. Soit $T \in \mathrm{Inv}(X)$. Pour tout $S \in \mathcal{B}(X)$, on a

$$T + S = (I + ST^{-1})T \quad \text{et} \quad \|ST^{-1}\| \leq \|S\|\|T^{-1}\|.$$

D'après la proposition précédente, $I + ST^{-1}$ est inversible dès que $\|ST^{-1}\| < 1$. Donc, il suffit de choisir $c = 1/\|T^{-1}\|$ pour avoir $T + S$ inversible pour tout $S \in \mathcal{B}(X)$ vérifiant $\|S\| < c$. □

On note par $\mathrm{D}(z,r)$ le disque ouvert de $\mathbb{C}$ de centre z et de rayon r. Le corollaire suivant découlent immédiatement du corolaire précédent.

Corollaire 1.5.8. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Alors $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\sigma(T) \subseteq \overline{\mathrm{D}(0,\|T\|)}$. En particulier, $\sigma(T)$ est un compact.*

1.6. Résolvante d'un opérateur

Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. On appelle *résolvante* de T, l'application $\mathrm{R}_T : \rho(T) \to \mathcal{B}(X)$ définie par $\mathrm{R}_T(\lambda) = (T-\lambda)^{-1}$. Elle vérifie l'*identité de la résolvante* :

$$\mathrm{R}_T(\alpha) - \mathrm{R}_T(\beta) = (\alpha-\beta)\mathrm{R}_T(\alpha)\mathrm{R}_T(\beta) \quad \text{pour tous } \alpha, \beta \in \rho(T).$$

Il découle de cette identité que R_T est holomorphe sur $\rho(T)$ et que $\mathrm{R}_T'(\lambda) = \mathrm{R}_T(\lambda)^2$.

Théorème 1.6.1. *Soit T un opérateur borné sur X. Alors*

(i) $\mathrm{R}_T(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n$ *pour tout* $|\lambda| > \|T\|$.

(ii) $\|\mathrm{R}_T(\lambda)\| \leq 1/(|\lambda| - \|T\|)$ *pour tout* $|\lambda| > \|T\|$.

(iii) $\lim_{|\lambda|\to\infty} \mathrm{R}_T(\lambda) = 0$.

Preuve. (i) Soit $\|\lambda\| > \|T\|$, alors $\|\lambda^{-1}T\| < 1$ et donc $I - \lambda^{-1}T$ est inversible et $(I - \lambda^{-1}T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} T^n$. D'où

$$\mathrm{R}_T(\lambda) = (T - \lambda)^{-1} = -\lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}T)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n.$$

(ii) Pour $\|\lambda\| > \|T\|$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{R_T}(\lambda) &= \| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n \| \\ &\leq \|\lambda\|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\|\lambda\|^{-1} \|T\| \right)^n \\ &= 1/(|\lambda| - \|T\|). \end{aligned}$$

(iii) Découle immédiatement de (ii) par passage à la limite. □

Corollaire 1.6.2. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, alors $\sigma(T)$ n'est pas vide.*

Preuve. Si $\sigma(T) = \emptyset$, il vient alors que la résolvante R_T est une fonction analytique sur tout $\mathbb{C}$, et comme

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \mathrm{R}_T(\lambda) = 0,$$

alors d'après le théorème de Liouville, la résolvante R_T est identiquement nulle, ce qui est absurde puisque $\mathrm{R}_T(\lambda) = (T-\lambda)^{-1}$ est inversible dans $\mathcal{B}(X)$. $\square$

Exemple 1.6.3. Considérons l'opérateur shift unilatéral à gauche $S_g : l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$. Alors $\sigma(S_g) = \overline{\mathrm{D}(0,1)}$.

En effet, on a $\|S_g\| = 1$, et donc $\sigma(S_g) \subseteq \overline{\mathrm{D}(0,1)}$. Soit $\lambda \in \mathrm{D}(0,1)$ non nul. Comme $x = (\lambda^n)_n \in l_2(\mathbb{C})$ et $S_g(x) = \lambda x$, il vient que $\lambda \in \sigma(S_g)$.

Proposition 1.6.4. *Soient $T \in \mathcal{B}(X)$ et X_1, X_2 deux sous-espaces fermés T-invariants tels que $X = X_1 \oplus X_2$. Alors $\sigma(T) = \sigma(T_{|X_1}) \cup \sigma(T_{|X_2})$.*

Preuve. Notons $T_i = T_{|X_i}$ pour $i \in \{1, 2\}$. Il est facile de vérifier que $\mathrm{N}(T) = \mathrm{N}(T_1) \oplus \mathrm{N}(T_2)$ et $\mathrm{R}(T_i) = X_i \cap \mathrm{R}(T)$. Il en résulte alors que

$$\begin{aligned}
0 \notin \sigma(T) &\Leftrightarrow T \text{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{N}(T) = \{0\} \text{ et } \mathrm{R}(T) = X \\
&\Leftrightarrow \mathrm{N}(T_i) = \{0\} \text{ et } \mathrm{R}(T_i) = X_i \text{ pour tout } i \in \{1, 2\} \\
&\Leftrightarrow T_1 \text{ et } T_2 \text{ sont inversibles} \\
&\Leftrightarrow 0 \notin \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)
\end{aligned}$$

D'où le résultat par translation. □

Exemple 1.6.5. Soit $P \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur idempotent, i.e. $P^2 = P$. Clairement, si $P = 0$ (resp. $P = I$) alors $\sigma(P) = \{0\}$ (resp. $\sigma(P) = \{1\}$). Supposons que $P \neq 0$ et $P \neq I$. Alors dans ce cas, on a $\sigma(P) = \{0, 1\}$. En effet, comme $P(P - I) = 0$, alors $X = \mathrm{N}(P) \oplus \mathrm{N}(I - P)$ où la somme directe est topologique. De plus, $\mathrm{N}(P)$ et $\mathrm{N}(I - P)$ sont deux sous-espaces P-invariants. Il vient par la proposition précédente que

$$\sigma(P) = \sigma(P_{|\mathrm{N}(P)}) \cup \sigma(P_{|\mathrm{N}(I-P)}) = \sigma(0) \cup \sigma(I) = \{0, 1\}.$$

1.7. Spectre à gauche et spectre à droite

Définition 1.7.1. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. On dit que T est *inversible à gauche* (resp. *droite*) s'il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $ST = I$ (resp. $TS = I$).

On note par $\mathrm{Inv}_\ell(X)$ (resp. $\mathrm{Inv}_\mathrm{r}(X)$) l'ensemble de tous les opérateurs inversibles à gauche (resp. droite) dans $\mathcal{B}(X)$. Le *spectre à gauche* $\sigma_\ell(T)$ et le *spectre à droite* $\sigma_\mathrm{r}(T)$ d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ sont définis par

$$\sigma_\ell(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \notin \mathrm{Inv}_\ell(X)\}$$

et

$$\sigma_\mathrm{r}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \notin \mathrm{Inv}_\mathrm{r}(X)\}.$$

Remarque 1.7.2. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, on a

(i) $\mathrm{Inv}(X) = \mathrm{Inv}_\ell(X) \cap \mathrm{Inv}_\mathrm{r}(X)$.

(ii) $\sigma(T) = \sigma_\ell(T) \cup \sigma_\mathrm{r}(T)$. En particulier, $\sigma_\ell(T)$ et $\sigma_\mathrm{r}(T)$ sont bornés dans $\mathbb{C}$.

(iii) Si $T \in \mathrm{Inv}_\ell(X)$ (resp. $\mathrm{Inv}_\mathrm{r}(X)$), alors $T^* \in \mathrm{Inv}_\mathrm{r}(X^*)$ (resp. $\mathrm{Inv}_\ell(X^*)$).

Proposition 1.7.3. *Les ensembles* $\mathrm{Inv}_\ell(X)$ *et* $\mathrm{Inv}_\mathrm{r}(X)$ *sont des ouverts de* $\mathcal{B}(X)$.

Preuve. Soit $T \in \mathrm{Inv}_\ell(X)$, alors il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $ST = I$. Soit $A \in \mathcal{B}(X)$ tel que $\|A - T\| < 1/\|S\|$. Il vient que

$$\|SA - I\| = \|SA - ST\| = \|S(A - T)\| \leq \|S\|\|A - T\| < 1,$$

et donc SA est inversible. Cela implique que $A \in \mathrm{Inv}_\ell(X)$. D'où $\mathrm{Inv}_\ell(X)$ est ouvert. De même, on obtient que $\mathrm{Inv}_\mathrm{r}(X)$ est ouvert. □

Le corollaire suivant découlent immédiatement de la proposition précédente.

Corollaire 1.7.4. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, alors $\sigma_\ell(T)$ et $\sigma_{\mathrm{r}}(T)$ sont des compacts de $\mathbb{C}$.*

Proposition 1.7.5. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. On a $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_\ell(T) \cap \sigma_{\mathrm{r}}(T)$. En particulier, $\sigma_\ell(T)$ et $\sigma_{\mathrm{r}}(T)$ sont des compacts non vides.*

Preuve. Soit $\lambda \in \partial\sigma(T) = \sigma(T) \cap \overline{\rho(T)}$, alors il existe une suite $(\lambda_n)_n \subseteq \rho(T)$ qui converge vers λ. Posons $c_n = \|(T - \lambda_n)^{-1}\|$. Si $\lambda \notin \sigma_\ell(T)$, alors il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $S(T -$

$\lambda) = I$. Il vient donc

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{c_n}\|S(T-\lambda)(T-\lambda_n)^{-1}\| \\ &= \frac{1}{c_n}\|S(T-\lambda_n+\lambda_n-\lambda)(T-\lambda_n)^{-1}\| \\ &\leq \frac{1}{c_n}\left(\|S\| + \|(\lambda_n-\lambda)S(T-\lambda_n)^{-1}\|\right) \\ &\leq \frac{1}{c_n}\|S\| + |\lambda_n-\lambda|\|S\|. \end{aligned}$$

Or, $(T-\lambda)(T-\lambda_n)^{-1}$ n'est pas inversible puisque $\lambda \in \sigma(T)$, et par conséquent

$$1 \leq \|1-(T-\lambda)(T-\lambda_n)^{-1}\| = |\lambda_n-\lambda|\|(T-\lambda_n)^{-1}\| = |\lambda_n-\lambda|c_n.$$

D'où, $1 \leq 2\|S\||\lambda_n - \lambda|$. Par passage à la limite, on trouve $1 \leq 0$ ce qui est absurde. De même, on obtient que $\lambda \in \sigma_{\mathrm{r}}(T)$. □

Théorème 1.7.6. *Soit* $T \in \mathcal{B}(X)$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est inversible à gauche ;*

(ii) T *est injectif à image fermée et* $\mathrm{R}(T)$ *admet un supplémentaire topologique.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $ST = I$. Il en résulte que T est injectif et $(TS)^2 = TS$, et donc TS est un idempotent. Il s'en suit que $X = \mathrm{N}(TS) \oplus \mathrm{N}(1 - TS)$ et $\mathrm{R}(TS) = \mathrm{N}(1 - TS)$. Comme

$$\mathrm{R}(T) = \mathrm{R}(TST) \subseteq \mathrm{R}(TS) \subseteq \mathrm{R}(T),$$

alors $\mathrm{R}(T) = \mathrm{R}(TS)$ qui est fermé et admet un supplémentaire topologique.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Clairement, T induit un isomorphisme $T_o : X \to \mathrm{R}(T)$. Soit $P : X \to \mathrm{R}(T)$ une projection et posons $S = T_o^{-1}P$. Il vient que $ST = I$ $\square$

Théorème 1.7.7. *Soit* $T \in \mathcal{B}(X)$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est inversible à droite ;*

(ii) T *est surjectif et* $\mathrm{N}(T)$ *admet un supplémentaire topologique.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $TS = I$. Il en découle que T est surjectif et $(ST)^2 = ST$. Par suite, TS est un idempotent, et donc $X = \mathrm{N}(ST) \oplus \mathrm{N}(1 - ST)$. Comme

$$\mathrm{N}(T) \subseteq \mathrm{N}(ST) \subseteq \mathrm{N}(TST) \subseteq \mathrm{N}(T),$$

alors $\mathrm{N}(T) = \mathrm{R}(ST)$ qui admet un supplémentaire topologique.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Considérons une décomposition topologique $X = \mathrm{N}(T) \oplus M$. Alors l'opérateur $T_1 : M \to X$ induit par

T est un isomorphisme. En considérant l'injection canonique $J : M \to X$ et l'opérateur $S = JT_1^{-1}$, on trouve que $TS = I$. $\square$

Proposition 1.7.8. *Soient $T \in \mathcal{B}(X)$ et X_1, X_2 deux sous-espaces fermés T-invariants tels que $X = X_1 \oplus X_2$. Alors*

$$\sigma_\ell(T) = \sigma_\ell(T_{|X_1}) \cup \sigma_\ell(T_{|X_2}) \quad \textit{et} \quad \sigma_{\mathrm{r}}(T) = \sigma_{\mathrm{r}}(T_{|X_1}) \cup \sigma_{\mathrm{r}}(T_{|X_2})$$

Preuve. Notons $T_i = T_{|X_i}$ pour $i \in \{1, 2\}$. Clairement, il suffit d'établir que T est inversible à gauche (resp. droite) si, et seulement si, T_1 et T_2 le sont.

Supposons T inversible à gauche. Alors, T est injectif et $\mathrm{R}(T)$ admet un supplémentaire topologique. Par conséquent, T_1 et T_2 sont injectifs à image fermée. Comme $\mathrm{R}(T) = \mathrm{R}(T_1) \oplus \mathrm{R}(T_2)$, alors $\mathrm{R}(T_1)$ et $\mathrm{R}(T_2)$ admettent des supplémentaires topologiques. D'où, T_1 et T_2 sont inversibles à gauche.

Réciproquement, supposons que T_1 et T_2 sont inversibles à gauche. Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, il existe $S_i \in \mathcal{B}(X_i)$

tel que $S_iT_i = I_i$. Considérons l'opérateur $S \in \mathcal{B}(X)$ défini par $Sx = S_1x_1 + S_2x_2$ pour tout $x = x_1 + x_2$ suivant la décomposition $X = X_1 \oplus X_2$; on note simplement $S = S_1 \oplus S_2$. Il vient que $ST = I$.

D'une manière similaire, on établit le résultat pour l'inversibilité à droite. $\square$

1.8. Ascente et descente

Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. L'ascente $\mathrm{a}(T)$ et la descente $\mathrm{d}(T)$ de T sont définies par

$$\mathrm{a}(T) = \min\{n \geq 0 : \mathrm{N}(T^n) = \mathrm{N}(T^{n+1})\}$$

et

$$\mathrm{d}(T) = \min\{n \geq 0 : \mathrm{R}(T^n) = \mathrm{R}(T^{n+1})\},$$

avec la convention $\min \emptyset = \infty$.

Notons que l'on a toujours $\mathrm{N}(T^n) \subseteq \mathrm{N}(T^{n+1})$ et $\mathrm{R}(T^{n+1}) \subseteq \mathrm{R}(T^n)$ pour tout $n \geq 0$.

Exemple 1.8.1. 1. Considérons l'opérateur shift unilatéral à droite $S_d : l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$. Alors

$$\mathrm{a}(S_d) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(S_d) = \infty.$$

En effet, S_d étant injectif, et donc $\mathrm{a}(S_d) = 0$. Comme

$$\mathrm{R}(S_d^k) = \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ fois}}, x_0, x_1, \ldots) : (x_n)_n \in l_2(\mathbb{C})\}$$

alors $\mathrm{R}(T^{n+1}) \subsetneq \mathrm{R}(T^n)$ pour tout $n \geq 0$, et donc $\mathrm{d}(S_d) = \infty$.

2. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur nilpotent d'indice de nilpotence $n \geq 2$. Alors

$$\mathrm{a}(T) = \mathrm{d}(T) = n.$$

En effet, comme $X = \mathrm{N}(T^n) = \mathrm{N}(T^{n+1})$ et $\mathrm{N}(T^{n-1}) \subsetneq X$, alors $\mathrm{a}(T) = n$. Pour la descente, on $\mathrm{R}(T^{n+1}) = \mathrm{R}(T^n) = \{0\}$ et $\mathrm{R}(T^{n-1}) \neq \{0\}$, et par conséquent $\mathrm{d}(T) = n$.

3. Soit $P \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur idempotent non trivial. Alors
$$\mathrm{a}(P) = \mathrm{d}(P) = 1.$$
En effet, par le fait que $P^2 = P$, on a $\mathrm{a}(P) \leq 1$ et $\mathrm{d}(P) \leq 1$. Mais, suivant la décomposition $X = \mathrm{N}(P) \oplus \mathrm{R}(P)$, on a $P = 0 \oplus I$, et donc $\mathrm{N}(P) \neq \{0\}$ et $\mathrm{R}(P) \neq X$ car P n'est pas trivial. D'où le résultat.

Remarque 1.8.2. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Les propriétés suivantes découlent immédiatement de la définition.

(i) $\mathrm{a}(T) = \mathrm{a}(\lambda T)$ et $\mathrm{d}(T) = \mathrm{d}(\lambda T)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul.

(ii) T est injectif (resp. surjectif) si, et seulement si, $\mathrm{a}(T) = 0$ (resp. $\mathrm{d}(T) = 0$).

(iii) T est inversible si, et seulement si, $\mathrm{a}(T) = \mathrm{d}(T) = 0$.

(iv) Si $\dim X < \infty$, alors $\mathrm{a}(T) < \infty$ et $\mathrm{d}(T) < \infty$.

Lemme 1.8.3. *Soient $T \in \mathcal{B}(X)$ et $k \geq 1$ un entier. Alors*

(i) $\mathrm{a}(T) \leq k$ *si, et seulement si,* $\mathrm{R}(T^k) \cap \mathrm{N}(T^n) = \{0\}$ *pour un certain (ou, d'une façon équivalente, pour tout)* $n \geq 1$.

(ii) $\mathrm{d}(T) \leq k$ *si, et seulement si,* $\mathrm{R}(T^n) + \mathrm{N}(T^k) = X$ *pour un certain (ou, d'une façon équivalente, pour tout)* $n \geq 1$.

Preuve. (i) Supposons que $\mathrm{a}(T) \leq k$. Soient $n \geq 1$ et $x \in \mathrm{R}(T^k) \cap \mathrm{N}(T^n)$, alors $T^n x = 0$ et $x = T^k y$ pour un certain $y \in X$. Or, $T^n x = T^{n+k} y = 0$ et $\mathrm{N}(T^{k+n}) = \mathrm{N}(T^k)$, donc $y \in \mathrm{N}(T^k)$ et $x = T^k y = 0$.

Réciproquement, si $x \in \mathrm{N}(T^{k+1})$, alors $T^k x \in \mathrm{R}(T^k) \cap \mathrm{N}(T) = \{0\}$. D'où, $x \in \mathrm{N}(T^k)$. Par conséquent, $\mathrm{N}(T^{k+1}) = \mathrm{N}(T^k)$.

(ii) Supposons que $\mathrm{d}(T) \leq k$. Soient $n \geq 1$ et $x \in X$, alors $T^k x \in \mathrm{R}(T^k) = \mathrm{R}(T^{k+n})$, et par conséquent, il existe $y \in X$ tel que $T^k x = T^{k+n} y$. Par suite, $x - T^n y \in \mathrm{N}(T^k)$, et donc $x \in \mathrm{R}(T^n) + \mathrm{N}(T^k)$. Ce qui montre que $\mathrm{R}(T^n) + \mathrm{N}(T^k) = X$.

Réciproquement, on a $\mathrm{R}(T^k) = T^k X = T^k(\mathrm{R}(T) + \mathrm{N}(T^k)) = \mathrm{R}(T^{k+1})$. $\square$

Remarque 1.8.4. Soient $T \in \mathcal{B}(X)$ et X_1, X_2 deux sous-espaces fermés T-invariants tels que $X = X_1 \oplus X_2$. Alors

$$\mathrm{a}(T) = \max\{\mathrm{a}(T_{|X_1}), \mathrm{a}(T_{|X_2})\}$$

et

$$\mathrm{d}(T) = \max\{\mathrm{d}(T_{|X_1}), \mathrm{d}(T_{|X_2})\}.$$

Théorème 1.8.5. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Si T est d'ascente et de descente finies, alors $\mathrm{a}(T) = \mathrm{d}(T) = n$ et $X = \mathrm{N}(T^n) \oplus \mathrm{R}(T^n)$ où la somme directe est topologique.*

Preuve. On pose $\mathrm{a}(T) = p$, $\mathrm{d}(T) = q$ et $n = \max\{\mathrm{a}(T), \mathrm{d}(T)\}$. D'après le lemme précédent, on a $\mathrm{R}(T^n) \cap \mathrm{N}(T^n) = \{0\}$ et $X = \mathrm{R}(T^n) + \mathrm{N}(T^n)$. Donc, $\mathrm{R}(T^n)$ est fermé et $X = \mathrm{N}(T^n) \oplus \mathrm{R}(T^n) = \mathrm{N}(T^p) \oplus \mathrm{R}(T^q)$. En posant $T_1 = T_{|\mathrm{N}(T^p)}$ et $T_2 = T_{|\mathrm{R}(T^q)}$, on trouve que T_1 est nilpotent d'indice de nilpotence p et T_2 est inversible. D'où $\mathrm{a}(T_1) = \mathrm{d}(T_1) = p$ et $\mathrm{a}(T_2) = \mathrm{d}(T_2) = 0$. Par suite,

$$\mathrm{a}(T) = \max\{\mathrm{a}(T_1), \mathrm{a}(T_2)\} = p$$

et

$$q = \mathrm{d}(T) = \max\{\mathrm{d}(T_1), \mathrm{d}(T_2)\} = p.$$

D'où le résultat. $\square$

Le corollaire suivant se déduit du théorème précédent et sa preuve.

Corollaire 1.8.6. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur non inversible, d'ascente et de descente finies. Alors, 0 est un point isolé dans $\sigma(T)$.*

Preuve. En utilisant les notations de la preuve du théorème précédent, T_2 est inversible et T_1 est nilpotent. Donc, il existe $r > 0$ tel que $T_i - \lambda$ est inversible, pour tout $i \in \{1, 2\}$, si $0 < |\lambda| < r$. D'où, $T - \lambda$ est inversible pour tout $0 < |\lambda| < r$, ce qui montre que 0 est un point isolé dans le spectre de T. $\square$

Proposition 1.8.7. *Soient $T \in \mathcal{B}(X)$ et $n \geq 1$.*

(i) $\mathrm{a}(T^*) \leq \mathrm{d}(T)$ *et* $\mathrm{a}(T) \leq \mathrm{d}(T^*)$.

(ii) *Si* $\mathrm{a}(T^*) = n$ *et* $\mathrm{R}(T^n)$, $\mathrm{R}(T^{n+1})$ *sont fermés, alors* $\mathrm{d}(T) = n$.

(iii) *Si* $\mathrm{a}(T) = n$ *et* $\mathrm{R}(T^{*n})$, $\mathrm{R}(T^{*n+1})$ *sont fermés, alors* $\mathrm{d}(T^*) = n$.

(iv) $\mathrm{a}(T) = \mathrm{d}(T) = n$ *si, et seulement si,* $\mathrm{a}(T^*) = \mathrm{d}(T^*) = n$.

Preuve. (i) Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathrm{d}(T) < \infty$. Posons $d = \mathrm{d}(T)$, on a

$$\mathrm{N}(T^{*d+1}) = \mathrm{R}(T^{d+1})^{\perp} = \mathrm{R}(T^{d})^{\perp} = \mathrm{N}(T^{*d}).$$

D'où, $\mathrm{a}(T^*) \leq \mathrm{d}(T)$. De même, on trouve $\mathrm{a}(T) \leq \mathrm{d}(T^*)$.

(ii) Comme $\mathrm{R}(T^n)$ et $\mathrm{R}(T^{n+1})$ sont fermés, on a

$$\mathrm{R}(T^{n+1}) = {}^{\perp}\mathrm{N}(T^{*n+1}) = {}^{\perp}\mathrm{N}(T^{*n}) = \mathrm{R}(T^n).$$

D'où $\mathrm{d}(T) \leq n$, et donc l'égalité par (i).

(iii) est similaire à (ii).

(iv) découle de (ii) et (iii). $\square$