2

Opérateurs compacts

2.1. Rappels de topologie

Soit E un espace métrique. Un sous-ensemble $A \subseteq E$ est dit *précompact* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_1, \ldots, x_n \in E \text{ tels que } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}_E(x_i, \varepsilon).$$

Notons que les éléments $x_1, \cdots, x_n$ peuvent être supposés dans A.

Théorème 2.1.1. *Supposons que* E *est complet et* $A \subseteq E$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) A *est relativement compact (i.e.* $\bar{A}$ *est compact) ;*

(ii) A *est précompact ;*

(iii) *De toute suite $(x_n)_n$ de A, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Lemme 2.1.2. *Si $A \subset E$ est précompact, alors $\overline{A}$ est séparable.*

Preuve. Soit $n \geq 1$, alors $A \subseteq \bigcup_{x \in A_n} \mathrm{B}_E(x, \frac{1}{n})$ où A_n est un sous-ensemble fini de A. Par suite, $D := \bigcup_{n \geq 1} A_n$ est un ensemble dénombrable. En plus, pour tout $y \in A$, on a

$$\mathrm{d}(y, D) \leq \mathrm{d}(y, A_n) \leq \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

donc $\mathrm{d}(y, D) = 0$, et par conséquent $D \subseteq A \subseteq \overline{D}$. D'où $\overline{A} = \overline{D}$. □

Pour tout espace compact K, on note par $C(K, E)$ l'espace des fonctions continues de K dans E muni de la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 2.1.3 (Arzela-Ascoli). *Soient K un espace compact et $A \subseteq C(K,E)$. Alors A est relativement compact si, et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *L'ensemble $A(x) = \{f(x) : f \in A\}$ est relativement compact dans E pour tout $x \in K$.*

(ii) *A est équicontinu, i.e. pour tous $a \in K$ et $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que*

$$\mathrm{d}(f(x), f(a)) \leq \varepsilon \quad \textit{pour tous } f \in A,\ x \in V.$$

2.2. Propriétés générales des opérateurs compacts

Définition 2.2.1. Soit $T : X \to Y$ un opérateur. On dit que T est *compact* si $T\mathrm{B}_X$ est relativement compact dans Y où B_X est la boule unité fermée de X.

On dit que T est de *rang fini* si $\dim \mathrm{R}(T) < \infty$.

Comme tout ensemble compact est borné, il découle de la définition que tout opérateur compact est nécessairement borné. On note par $\mathcal{K}(X, Y)$ (resp. $\mathcal{F}(X, Y)$) l'ensemble de tous les opérateurs compacts (resp. de rang fini) dans $\mathcal{B}(X, Y)$. Lorsque $X = Y$, on note simplement $\mathcal{K}(X, Y) = \mathcal{K}(X)$ et $\mathcal{F}(X, Y) = \mathcal{F}(X)$.

Remarque 2.2.2. (i) L'opérateur identité I n'est pas compact. En effet, d'après le théorème de Riesz, un espace normé est de dimension finie si, et seulement si, sa boule unité fermée est compacte.

(ii) $\mathcal{F}(X, Y) \subseteq \mathcal{K}(X, Y)$ car dans un espace normé de dimension finie les compacts sont les sous-ensembles fermés bornés.

(iii) Les opérateurs de rang fini ne sont pas toujours bornés.

Théorème 2.2.3. *Soit Z un espace de Banach complexe.*

(i) $\mathcal{K}(X,Y)$ *est un sous-espace fermé dans* $\mathcal{B}(X,Y)$.

(ii) *Soient $S \in \mathcal{B}(X,Y)$ et $T \in \mathcal{B}(Y,Z)$. Si S ou T est compact, alors TS est compact. En particulier, $\mathcal{K}(X)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{B}(X)$.*

Preuve. (i) Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(X,Y)$ et $c \in \mathbb{C}$. On a $\overline{T_1 \mathrm{B}_X}$ et $\overline{cT_2 \mathrm{B}_X}$ sont deux compacts, et donc leur somme l'est aussi. Comme

$$\overline{(T_1 + cT_2)\mathrm{B}_X} \subseteq \overline{T_1 \mathrm{B}_X} + c\overline{T_2 \mathrm{B}_X},$$

il vient que $T_1 + cT_2$ est un opérateur compact.

Soient $S \in \overline{\mathcal{K}(X,Y)}$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe un opérateur $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ vérifiant $\|S - T\| < \varepsilon/2$, et donc $S\mathrm{B}_X \subseteq T\mathrm{B}_X + \mathrm{B}_Y(0, \frac{\varepsilon}{2})$. Comme $T\mathrm{B}_X$ est précompact, il existe des vecteurs

$y_i \in Y$, $1 \leq i \leq n$, tels que

$$TB_X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_Y(y_i, \frac{\varepsilon}{2}) = \{y_1, \ldots, y_n\} + B_Y(0, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} SB_X &\subseteq \{y_1, \ldots, y_n\} + B_Y(0, \frac{\varepsilon}{2}) + B_Y(0, \frac{\varepsilon}{2}) \\ &= \{y_1, \ldots, y_n\} + B_Y(0, \varepsilon) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} B_Y(y_i, \varepsilon). \end{aligned}$$

Cela montre que SB_X est précompact. D'où, $S \in \mathcal{K}(X, Y)$.

(ii) Si S est compact, alors $\overline{SB_X}$ est compact et $TS(B_X) \subseteq T(\overline{SB_X})$, et par suite $TS(B_X)$ est relativement compact. D'où, $TS \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Si T est compact, on a $\overline{TB_X}$ est compact et

$$TS(B_X) \subseteq T\left(\|S\| B_Y\right) = \|S\| TB_Y \subseteq \|S\| \overline{TB_Y},$$

ce qui implique que $TS(\mathrm{B}_X)$ est relativement compact, et donc TS est compact. $\square$

Théorème 2.2.4. *Soit Z un espace de Banach complexe.*

(i) $\mathcal{F}(X,Y)$ *est un sous-espace et* $\overline{\mathcal{F}(X,Y)} \subseteq \mathcal{K}(X,Y)$.

(ii) *Soient $S \in \mathcal{B}(X,Y)$ et $T \in \mathcal{B}(Y,Z)$. Si S ou T est de rang fini, alors TS est de rang fini. En particulier, $\mathcal{F}(X)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{B}(X)$.*

Preuve. (i) Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{F}(X,Y)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $\mathrm{R}(T_1 + \lambda T_2) \subseteq \mathrm{R}(T_1) + \mathrm{R}(T_2)$, et donc $T_1 + \lambda T_2$ est de rang fini. Comme $\mathcal{K}(X,Y)$ est fermé et contient les opérateurs de rang fini, alors $\overline{\mathcal{F}(X,Y)} \subseteq \mathcal{K}(X,Y)$.

(ii) Si T est de rang fini, alors $\dim \mathrm{R}(T) < \infty$ et $\mathrm{R}(TS) \subseteq \mathrm{R}(T)$. D'où, $TS \in \mathcal{F}(X,Y)$.

Maintenant si S est de rang fini, alors $\dim \mathrm{R}(S) < \infty$ et $\mathrm{R}(TS) = T\mathrm{R}(S)$. Cela entraîne que $TS \in \mathcal{F}(X,Y)$. $\square$

On signale que si TS est compact, ou même de rang fini, cela n'entraîne pas que T, ou S, est compact. En fait, considérons deux espaces de Banach X_1 et X_2 de dimension infinie. Posons $T = 0 \oplus I$ et $S = I \oplus 0$ sur l'espace $Z = X_1 \oplus X_2$. Alors $TS = 0$ est de rang fini, mais T et S ne sont pas compacts ; en effet, par exemple on a $\mathrm{B}_{X_2} = \overline{T\mathrm{B}_{X_2}} \subseteq \overline{T\mathrm{B}_Z}$.

Corollaire 2.2.5. *Si $(T_n)_n$ est une suite d'opérateurs de rang fini dans $\mathcal{B}(X, Y)$ telle que $T_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$, alors T est compact.*

Exemple 2.2.6. Considérons l'opérateur $T : l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$ défini par

$$Tx = \left(\frac{1}{2^n} x_n\right)_{n\geq 0} \quad \text{pour tout } x = (x_n)_{n\geq 0} \in l_2(\mathbb{C}).$$

C'est un opérateur borné car

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n} |x_n|^2 \leq \sum_{n\geq 0} |x_n|^2 = \|x\|^2.$$

Pour tout $n \geq 0$, considérons l'opérateur $T_n : l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$ donné par

$$T_n x = (x_0, \ldots, \frac{1}{2^n} x_n, 0, \cdots) \quad \text{pour tout } x = (x_n)_{n\geq 0} \in l_2(\mathbb{C}).$$

Il est clair que les opérateurs T_n sont bornés et de rang fini. Or,

$$\|(T - T_n)x\|^2 = \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{4^k} |x_k|^2 \leq \|x\|^2 \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{4^k},$$

et donc $\|T - T_n\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Ce qui montre que T est compact.

Remarque 2.2.7. Lorsque Y est un espace de Hilbert alors $\overline{\mathcal{F}(X,Y)} = \mathcal{K}(X,Y)$. En effet, soient $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ et $\varepsilon > 0$. Comme $T\mathrm{B}_X$ est précompact, il existe $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tels que $T\mathrm{B}_X \subset \cup_{i=1}^{n} \mathrm{B}_Y(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Notons $G = \mathrm{Vect}(y_1, \ldots, y_n)$ et P la projection orthogonale sur G. Il vient que $\|P\| = 1$ et $S = PT$ est un opérateur borné de rang fini. Soit $x \in \mathrm{B}_X$, on a $\|Tx - y_k\| < \varepsilon/2$ pour un certain $k \in \{1, \ldots, n\}$, et par suite

$$\begin{aligned} \|Sx - Tx\| &\leq \|Sx - y_k\| + \|Tx - y_k\| \\ &= \|PTx - Py_k\| + \|Tx - y_k\| \\ &\leq \|P\|\|Tx - y_k\| + \|Tx - y_k\| \\ &= 2\|Tx - y_k\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où, $\|S - T\| \leq \varepsilon$ et $T \in \overline{\mathcal{F}(X,Y)}$.

Théorème 2.2.8. *Soit* $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. *On a*

(i) $T \in \mathcal{F}(X, Y)$ *si, et seulement si,* $\mathrm{R}(T)$ *est fermé.*

(ii) $\overline{\mathrm{R}(T)}$ *est séparable.*

Preuve. (i) Évidemment, la condition est nécessaire. Supposons que $\mathrm{R}(T)$ est fermé. Alors l'opérateur $T_0 : X \to \mathrm{R}(T)$, induit par T, est surjectif, et donc d'après le théorème de l'application ouverte, il existe $c > 0$ tel que

$$\frac{c}{2}\mathrm{B}_{\mathrm{R}(T)} \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{R}(T)}(0, c) \subseteq \overline{T\mathrm{B}_X}.$$

Il vient alors que $\mathrm{B}_{\mathrm{R}(T)}$ est compact. Ce qui établit que $\mathrm{R}(T)$ est de dimension finie.

(ii) On a $\mathrm{R}(T) = \cup_{n \geq 1} nT\mathrm{B}_X$. Or, pour tout $n \geq 1$, $nT\mathrm{B}_X$ est relativement compact, donc il existe un sous-ensemble dénombrable A_n tel que $\overline{A_n} = n\overline{T\mathrm{B}_X}$. Comme toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable, alors l'ensemble $A = \cup_{n\geq 1} A_n$ est dénombrable, et en plus on a

$$A \subseteq \mathrm{R}(T) \subseteq \bigcup_{n\geq 1} \overline{A_n} \subseteq \overline{A}.$$

D'où, $\overline{\mathrm{R}(T)} = \overline{A}$, ce qui termine la preuve. $\square$

Théorème 2.2.9 (Théorème de Shauder). *Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, alors T est compact si, et seulement si, T^* est compact.*

Preuve. On suppose que T est compact. On a $K = \overline{T\mathrm{B}_X}$ est un compact de Y. Soit $(\varphi_n)_n \subseteq \mathrm{B}_{Y^*}$ et considérons la suite $g_n = \varphi_{n|K}$ de l'espace $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$. La suite $(g_n)_n$ est bornée et équiconitnue car

$$\|g_n\|_\infty = \sup_{y \in K} |g_n(y)| = \sup_{y \in T\mathrm{B}_X} |g_n(y)| = \sup_{x \in \mathrm{B}_X} |\varphi_n(Tx)| \leq \|T\|,$$

et

$$\|g_n(x) - g_n(y)\| \leq \|\varphi_n\| \|x - y\| \leq \|x - y\| \; \forall x, y \in K, n \in \mathbb{N}.$$

Par le théorème d'Ascoli, la suite (g_n) est relativement compacte. Par suite, il existe une suite extraite (g_{n_k}) de

Cauchy dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$. D'autre part,

$$\|T^*\varphi_{n_k} - T^*\varphi_{n_s}\| = \sup_{x \in \mathrm{B}_X} |(\varphi_{n_k} - \varphi_{n_s})Tx| = \sup_{y \in K} |(\varphi_{n_k} - \varphi_{n_s})y|,$$

donc $(T^*\varphi_{n_k})$ est de Cauchy dans X^*. Ce qui montre que $T^*\mathrm{B}_{Y^*}$ est relativement compact, et par suite T^* est compact.

Réciproquement, supposons que T^* est compact. Alors d'après ce qui précède T^{**} est compact. Comme T^{**} est une extension de T à X^{**}, on obtient que T est compact. $\square$

On rappelle qu'une suite généralisée dans X est une famille $(x_i)_{i\in I}$ indexée par un ensemble filtrant I, i.e. I est ordonné et tout sous-ensemble de I à deux éléments est majoré.

On exprime la convergence d'une suite généralisée $(x_i)_{i\in I}$ dans X vers $x \in X$ par

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists i \in I,\ \forall j \in I : j \geq i \Rightarrow \|x_j - x\| < \varepsilon.$$

Il est bien connu qu'une application $F : X \to Y$ est continue en un point $a \in X$ si, et seulement si, pour toute suite généralisée $(x_i)_{i\in I}$ qui converge vers a, la suite généralisée $(F(x_i))_{i\in I}$ converge vers $F(a)$.

En conséquence, si $T : X \to Y$ est un opérateur borné, alors $T : (X, \sigma(X, X^*)) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ reste continue.

Théorème 2.2.10. *Soit* $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est compact ;*

(ii) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{B}_X$ *tels que*

$$\min_{1 \le i \le n} \|Tx - Tx_i\| < \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{B}_X;$$

(iii) *Pour toute suite généralisée* $(x_\alpha)_\alpha \subseteq \mathrm{B}_X$ *convergeant faiblement vers zéro, la suite généralisée* $\|Tx_\alpha\|$ *converge vers zéro ;*

(iv) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un sous-espace* $M \subseteq X$ *fermé et de codimension finie tel que* $\|T_{|M}\| \le \varepsilon$.

Preuve. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). On a

$$\begin{aligned} T \text{ est compact } &\Leftrightarrow T\mathrm{B}_X \text{ est relativement compact} \\ \Leftrightarrow\ & \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{B}_X : T\mathrm{B}_X \subset \cup_{i=1}^n \mathrm{B}_Y(Tx_i, \varepsilon) \\ \Leftrightarrow\ & \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{B}_X : \min_{1 \leq i \leq n} \|Tx - Tx_i\| < \varepsilon,\ \forall x \in \mathrm{B}_X. \end{aligned}$$

(i) $\Rightarrow$ (iii). On a $K = \overline{T\mathrm{B}_X}$ est un compact de Y et l'application $I_K : (K, \|.\|) \to (K, \sigma(Y, Y^*)$ est une bijection continue, donc c'est un homéomorphisme. Comme $T_{|\mathrm{B}_X} : (\mathrm{B}_X, \sigma(X, X^*) \to (K, \sigma(Y, Y^*)$ est continu, alors en composant à droite par I_K^{-1}, il vient que $T_{|\mathrm{B}_X} : (\mathrm{B}_X, \sigma(X, X^*) \to (K, \|.\|)$ est continu. D'où le résultat.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Supposons que l'assertion (iii) n'est pas vérifiée. Alors, il existe $c > 0$ tel que pour tout sous-espace fermé de codimension finie M, il existe $x_M \in M$ satisfaisant $\|x_M\| = 1$ et $\|Tx_M\| \geq c$. On obtient ainsi une suite généralisée indexée par une famille de sous-espaces munie de la relation d'ordre $M \geq M' \Leftrightarrow M \subseteq M'$. Si $\varphi \in X^*$, alors $M_0 = \mathrm{N}(\varphi)$ est un hyperplan de X, et pour tout $M \geq M_0$, on a $\varphi(x_M) = 0$. Ce qui implique que (x_M) converge faiblement vers zéro. Cependant, $\|Tx_M\| \nrightarrow 0$, une contradiction.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Si T n'est pas compact, il existe alors $c > 0$ tel que

$$T\mathrm{B}_X \nsubseteq \bigcup_{x \in \Omega} \mathrm{B}_Y(Tx, c) \quad \text{pour tout sous-ensemble fini } \Omega \subseteq \mathrm{B}_X.$$

Soit $x_1 \in \mathrm{B}_X$, il existe $x_2 \in \mathrm{B}_X$ tel que $\|Tx_1 - Tx_2\| \geq c$. Pour $\Omega = \{x_1, x_2\}$, il existe $x_3 \in \mathrm{B}_X$ tel que $\|Tx_3 - Tx_2\| \geq c$ et $\|Tx_3 - Tx_1\| \geq c$. De proche en proche, on construit une suite $(x_n) \subseteq \mathrm{B}_X$ telle que $\|Tx_i - Tx_j\| \geq c$ pour tous $i \neq j$.

Soient M un sous-espace fermé de codimension finie, $P \in \mathcal{B}(X)$ une projection sur M et $\varepsilon > 0$. Comme $R(I - P) =$

$N(P)$ est de dimension finie, l'opérateur $I-P$ est compact. D'après (ii), il existe $y_1, \ldots, y_r \in \mathrm{B}_X$ tels que $\min_{1\leq i\leq n} \|(I-P)(x-y_i)\| < \varepsilon/2$ pour tout $x \in \mathrm{B}_X$. En particulier, pour la suite $(x_n)_n$, il existe $j,k \in \mathbb{N}$ tels que $j \neq k$, $\|(I-P)(x_j-y_s)\| \leq \varepsilon/2$ et $\|(I-P)(x_k-y_s)\| \leq \varepsilon/2$ pour un certain $1 \leq s \leq r$, et donc $\|(I-P)(x_j-x_k)\| \leq \varepsilon$. Il vient alors

$$\|P(x_j-x_k)\| \leq \|x_j-x_k\| + \|(I-P)(x_j-x_k)\| \leq 2+\varepsilon,$$

et

$$\|TP(x_j-x_k)\| \geq \|T(x_j-x_k)\| - \|T(I-P)(x_j-x_k)\| \geq c - \varepsilon\|T\|.$$

Par conséquent,

$$\|T_{|M}\| = \sup\{\|Tu\| : u \in M, \|u\| = 1\} \geq \frac{\|TP(x_j-x_k)\|}{\|P(x_j-x_k)\|} \geq \frac{c-\varepsilon\|T\|}{2+\varepsilon}.$$

Or, ε est arbitraire, donc $\|T_{|M}\| \geq c/2$, ce qui est une contradiction. □

Corollaire 2.2.11. *Si $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ est un opérateur compact, alors pour toute $(x_n)_n$ de X convergeant faiblement, la suite $(Tx_n)_n$ converge fortement.*

Preuve. Soit $(x_n)_n$ une suite convergeant faiblement vers $x \in X$, alors $y_n = x_n - x$ est une suite qui converge faiblement vers 0, et donc elle est bornée. En appliquant le théorème précédent sur la suite $(\frac{1}{m} y_n)_n$ où $m = \sup_n \|y_n\|$, on obtient que $(Ty_n)_n$, et donc aussi (Tx_n), converge fortement. $\square$

La réciproque du corolaire précédent est vraie lorsque X est réflexif. En effet, dans ce cas B_X est faiblement compacte, et donc pour toute suite $(x_n) \subseteq \mathrm{B}_X$, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge faiblement. D'après les hypothèses, la suite $(Tx_{n_k})_k$ converge en norme, d'où $T\mathrm{B}_X$ est relativement compact.

Si l'espace de Banach X n'est pas réflexif, alors la réciproque tombe en défaut. En effet, pour toute suite $(x_n) \subseteq \ell_1(\mathbb{C})$, on a d'après le Lemme de Schur

$$x_n \xrightarrow{\sigma(\ell_1,\ell_\infty)} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|x_n\| \to 0.$$

Cependant, l'opérateur identité de $\ell_1(\mathbb{C})$ n'est pas compact.

Exemple 2.2.12. Considérons l'opérateur $V : L_2([0,1]) \to C([0,1])$ défini par

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \quad \text{pour tous } f \in L_2([0,1]),\ x \in [0,1].$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit $\chi_{[x,y]}.f$ on voit que :

$$|V(f)(x) - V(f)(y)| = |\int_x^y f(t)dt| \leq \|f\|_2 |x-y|^{1/2}, \tag{2.1}$$

donc V est bien défini. En plus il est borné car

$$\|V(f)\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |V(f)(x)| \leq \|f\|_2.$$

Vu l'inégalité (2.1), le théorème d'Arzela-Ascoli affirme que $V\mathrm{B}_{L_2([0,1])}$ est relativement compact dans $C([0,1])$, donc V est compact. Comme $C([0,1])$ s'injecte dans $L_2([0,1])$, alors V est un opérateur compact de $L_2([0,1])$ dans $L_2([0,1])$.

Proposition 2.2.13. *Soient H, K deux espaces de Hilbert complexes et $T \in \mathcal{B}(H, K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est compact ;*

(ii) *Pour toute famille orthonormale $(e_n)_n$ de H, on a*

$$\lim \|Te_n\| = 0.$$

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). La suite $(e_n)_n$ converge faiblement vers 0 car, pour tout $y \in H$, on a $\sum_{n\geq 0} | < e_n, y > |^2 \leq \|y\|^2$, et donc $\lim < e_n, y >= 0$. D'après le corollaire précédent, on trouve que $\lim \|Te_n\| = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Si T n'est pas compact, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|T - F\| > \varepsilon$ pour tout $F \in \mathcal{F}(H, K)$. En particulier, $\|T\| > \varepsilon$, et donc il existe $e_0 \in H$ unitaire (i.e. de norme 1) tel que

$\|Te_0\| > \varepsilon$. Soit $P_0 \in \mathcal{B}(H)$ la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\{e_0\}$. Alors TP_0 est de rang fini et donc $\|T - TP_0\| > \varepsilon$. Il existe alors $u_1 \in H$ unitaire tel que

$$\|(T - TP_0)u_1\| > \varepsilon \geq \varepsilon\|(I - P_0)u_1\|.$$

En posant $e_1 = \|(I - P_0)u_1\|^{-1}(T - TP_0)u_1$, on trouve que e_1 est unitaire, orthogonal à e_0 et $\|Te_1\| > \varepsilon$. De proche en proche, on arrive à construire une famille orthonormale $(e_n)_n$ dans H telle que $\lim \|Te_n\| > 0$. □

Corollaire 2.2.14. *Un opérateur $T \in \mathcal{B}(H, K)$ est compact si, et seulement si, pour toute famille orthonormale $(e_n)_n$ de $\mathrm{N}(T)^\perp$, on a* $\lim \|Te_n\| = 0$.

Preuve. De toute évidence, la condition est nécessaire. Pour la suffisance, il suffit de remarque que l'opérateur T se décompose comme $T = T_{|\mathrm{N}(T)^\perp} \circ P$ où $P : H \to \mathrm{N}(T)^\perp$ est une projection, et d'après l'hypothèse $T_{|\mathrm{N}(T)^\perp}$ est compact. $\square$

2.3. Théorie spectrale des opérateurs compacts

Notons que la restriction d'un opérateur compact $T \in \mathcal{B}(X)$ à un sous-espace fermé F est compact car $T_{|F}\mathrm{B}_F = T_{|F}(\mathrm{B}_X \cap F) \subseteq \overline{T\mathrm{B}_X}$.

Théorème 2.3.1. *Soit $K \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur compact. Pour tout complexe λ non nul, on a*

(i) $\mathrm{N}(K - \lambda)$ *est de dimension finie.*

(ii) $\mathrm{R}(K - \lambda)$ *est fermé et de codimension finie.*

Preuve. (i) Comme $K_{|\mathrm{N}(K-\lambda)} = \lambda$ est un opérateur compact, alors $\dim \mathrm{N}(K - \lambda)$ est finie.

(ii) Il existe un sous-espace fermé M de codimension finie tel que $\|K_{|M}\| \leq \frac{|\lambda|}{2}$. On a

$$\|(K-\lambda)x\| \geq |\lambda|\|x\| - \|Kx\| \geq \frac{|\lambda|}{2}\|x\| \quad \text{pour tout } x \in M.$$

D'où, $(K-\lambda)M$ est fermé, et donc $\mathrm{R}(K-\lambda)$ est fermé. D'autre part, comme K^* est compact, on a $\dim \mathrm{N}(K^*-\lambda)$ est finie, et par suite le sous-espace $\mathrm{R}(K-\lambda) = {}^{\perp}\mathrm{N}(K^*-\lambda)$ est de codimension finie. $\square$

On note que si $K \in \mathcal{K}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors pour tout $n \geq 1$ on a

$$\dim \mathrm{N}(K-\lambda)^n < \infty \quad \text{et} \quad \operatorname{codim} \mathrm{R}(K-\lambda)^n < \infty.$$

En effet, ceci résulte du précédent théorème et du fait que

$$(K-\lambda)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-\lambda)^{n-k} K^k = (-\lambda)^n + K \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-\lambda)^{n-k} K^{k-1},$$

qui est la somme d'un scalaire multiple de l'identité et d'un opérateur compact.

Lemme 2.3.2. *Soit M un sous-espace fermé propre de X. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $\|x\| \leq 1 + \varepsilon$ et* $\operatorname{dist}(x, M) = 1$.

Preuve. Comme X/M est un espace de Banach non réduit à zéro, alors il existe $x_0 \in X$ tel que $\|x_0 + M\| = 1$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \in M$ tel que $\|x_0 - m\| \leq 1 + \varepsilon$. En posant $x = x_0 - m$ on trouve que $\operatorname{dist}(x, M) = \|x + M\| = \|x_0 + M\| = 1$. □

Théorème 2.3.3. *Soit $K \in \mathcal{K}(X)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul, $K - \lambda$ est d'ascente et de descente finies.*

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\lambda = 1$. Supposons que $K - I$ n'est pas d'ascente finie. D'après le lemme précédent, pour tout entier $k \geq 1$, il existe $x_k \in \mathrm{N}((K-I)^k)$ tel que $\|x_k\| \leq 2$ et $\mathrm{dist}(x_k, \mathrm{N}(K - I)^{k-1}) = 1$. Soient i, j deux entiers tels que $i > j \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \|Kx_j - Kx_i\| &= \|(K-I)x_j + x_j - (K-I)x_i - x_i\| \\ &\geq \mathrm{dist}(x_i, \mathrm{N}(K-I)^{i-1}) = 1, \end{aligned}$$

puisque $(K-I)x_j + x_j - (K-I)x_i \in \mathrm{N}((K-I)^{i-1})$. Il vient alors que la suite $(Kx_k)_k$ ne possède aucune sous-suite extraite convergente, ce qui contredit la compacité de K.

Comme K^* est compact, alors $K^* - I$ est d'ascente finie. Or, $\mathrm{R}(K-I)^n$ est fermé pour tout entier n, d'où $K - I$ est de descente finie. □

Théorème 2.3.4. *Soient $K \in \mathcal{K}(X)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul, on a*

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{N}(K-\lambda) &= \dim \mathrm{N}(K^*-\lambda) \\ &= \operatorname{codim} \mathrm{R}(K-\lambda) \\ &= \operatorname{codim} \mathrm{R}(K^*-\lambda). \end{aligned}$$

Preuve. On pose $T = K-\lambda$ et $p = \mathrm{a}(T) = \mathrm{d}(T)$. Écrivons $T = T_0 \oplus T_1$ relativement à la décomposition $X = \mathrm{N}(T^p) \oplus \mathrm{R}(T^p)$. Comme T_1 est inversible, alors

$$\begin{aligned} \operatorname{codim} \mathrm{R}(T) &= \operatorname{codim} \mathrm{R}(T_0) = \dim \mathrm{N}(T^p)/T\mathrm{N}(T^p) \\ &= \dim \mathrm{N}(T^p) - \dim T\mathrm{N}(T^p). \end{aligned}$$

En plus T_0 induit un opérateur bijectif de $\mathrm{N}(T^p)/\mathrm{N}(T)$ dans $T\mathrm{N}(T^p)$, et donc $\dim \mathrm{N}(T^p) - \dim T\mathrm{N}(T^p) = \dim \mathrm{N}(T)$. Ce qui montre que $\operatorname{codim} \mathrm{R}(T) = \dim \mathrm{N}(T)$.

On a aussi par dualité $\operatorname{codim} \mathrm{R}(T^*) = \dim \mathrm{N}(T^*)$. D'autre part, comme ${}^{\perp}\mathrm{R}(T^*) = \mathrm{N}(T)$, alors $\dim \mathrm{N}(T) = \operatorname{codim} \mathrm{R}(T^*)$, ce qui termine la preuve. $\square$

Il découle, en particulier, du théorème précédent que si $K \in \mathcal{K}(X)$ et λ un complexe non nul, alors $K - \lambda$ est injectif si, et seulement si, $K - \lambda$ est surjectif.

Le théorème précédent est connu dans la littérature sous le nom de l'*Alternative de Fredholm*. En fait, l'appellation est justifiée par la version suivante de ce résultat : Si $K \in \mathcal{B}(X)$ est un opérateur compact, alors une et une seule des deux alternatives suivantes est vérifiée :

1. ou bien pour chaque $u \in X$, l'équation $(K - I)x = u$ possède une unique solution,

2. ou bien $(K^* - I)x = 0$ possède n solutions linéairement indépendantes x_i^*, $1 \leq i \leq n$, et dans ce cas, pour que l'équation $(K - I)x = u$ possède une solution, il faut et il suffit que $x_i^*(u) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Notons que $\mathrm{N}(K^* - I) = \mathrm{Vect}\{x_i^* : 1 \leq i \leq n\} = \mathrm{R}(K - I)^{\perp}$.

Corollaire 2.3.5. *Supposons que X est de dimension infinie, et soit $K \in \mathcal{K}(X)$. Alors*

$$\sigma(K) = \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(K).$$

Preuve. Si K est inversible, alors $I = KK^{-1}$ est compact ce qui n'est pas possible. D'où, $0 \in \sigma(K)$ et par suite $\{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(K) \subseteq \sigma(K)$.

Soit $\lambda \in \sigma(K)$, si $\lambda \neq 0$, alors $K - \lambda$ n'est pas injectif d'après le théorème précédent, donc $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(K)$. □

Théorème 2.3.6. *Soit $K \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur compact. Alors :*

(i) *Tout $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ est un point isolé dans $\sigma(K)$.*

(ii) *$\sigma(K)$ est au plus dénombrable. En plus, si $\sigma(K)$ est infini, alors 0 est son seul point d'accumulation.*

Preuve. (i) découle immédiatement du fait que $K - \lambda$ est d'ascente et de descente finies pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul.

(ii) Comme l'ensemble $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est discret, alors

$$A_n := \sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$$

est compact et discret, donc fini, pour tout entier $n \geq 1$. Par suite, $\sigma(T) = \{0\} \cup (\cup_n A_n)$ est au plus dénombrable.

Supposons que $\sigma(K)$ est infini. Comme tout $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ est un point isolé dans $\sigma(T)$, alors λ ne peut pas être un point d'accumulation de $\sigma(T)$. D'autre part, comme $\sigma(T)$ est un ensemble infini et borné, alors il possède un point d'accumulation qui est égale à 0. $\square$

Remarque 2.3.7. Pour un opérateur compact $K \in \mathcal{B}(X)$ de spectre infini, on peut réarranger les éléments de $\sigma(K) \setminus \{0\}$ en une suite décroissante en module vers 0.