3

Opérateurs bornés sur un espace de Hilbert

Dans toute la suite, H et K dénotent deux espaces de Hilbert complexes de dimension infinie.

3.1. Adjoint d'un opérateur borné

On rappelle qu'une forme sesquilinéaire φ est une application de $H \times K$ dans $\mathbb{C}$ linéaire par rapport à la première variable et antilinéaire par rapport à la deuxième variable. Dans ce cas, on dit que φ est bornée si

$$\sup_{x \neq 0,\, y \neq 0} \frac{|\varphi(x, y)|}{\|x\|\|y\|} < \infty.$$

Théorème 3.1.1. *Soit* $\varphi : H \times K \to \mathbb{C}$ *une forme sesquilinéaire bornée. Alors, il existe deux opérateurs uniques* $A \in \mathcal{B}(H, K)$ *et* $B \in \mathcal{B}(K, H)$ *tels que*

$$\max\{||A||, ||B||\} \leq \sup_{x\neq 0,\, y\neq 0} \frac{|\varphi(x, y)|}{||x||||y||}$$

et

$$\varphi(x, y) = \langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle \; \forall x \in H, y \in K.$$

Preuve. Soit $x \in H$. On définit une forme linéaire bornée $L_x : K \to \mathbb{C}$ par $L_x(y) = \overline{\varphi(x, y)}$. D'après le théorème de Riesz, il existe $z \in K$ unique tel que

$$L_x = \langle ., z\rangle \quad \text{et} \quad ||L_x|| = ||z|| \leq ||x||M$$

où $M = \sup_{x\neq 0,\, y\neq 0} \frac{|\varphi(x,y)|}{||x||||y||}$. Alors, on définit bien un opérateur borné $A \in \mathcal{B}(H, K)$ en posant $Ax = z$.

De plus, on a

$$\langle Ax, y\rangle = \overline{\langle y, Ax\rangle} = \overline{L_x(y)} = \varphi(x, y).$$

S'il existe $C \in \mathcal{B}(H, K)$ vérifiant $\langle Ax, y\rangle = \varphi(x, y)$ pour tous $x \in H$ et $y \in K$, alors $\langle (C - A)x, y\rangle =$ pour tous $x \in H$ et $y \in K$. D'où, $C = A$. De même, on trouve B. $\square$

Soit $A \in \mathcal{B}(H, K)$. L'unique opérateur $B \in \mathcal{B}(K, H)$ vérifiant $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$, pour tous $x \in H$ et $y \in K$, est appelé l'*adjoint* de A et on le note par $B = A^*$.

Si l'on note $A' : K^* \to H^*$ l'adjoint de A dans le contexte des espaces de Banach et $\mathrm{J}_H : H^* \to H$ l'isométrie surjective antilinéaire de Riesz, alors $A^* = \mathrm{J}_H A' \mathrm{J}_K^{-1}$.

Exemple 3.1.2. 1. Soient $x, y \in H$ non nuls, et notons par $x \otimes y$ l'opérateur borné de rang 1 donné par $(x \otimes y)u = \langle u, y\rangle x$ pour tout $u \in H$. Alors

$$(x \otimes y)^* = y \otimes x.$$

En effet, pour tous $v, w \in H$, on a

$$\begin{aligned}
\langle (x \otimes y)^* v, w\rangle &= \langle v, (x \otimes y)w\rangle = \langle v, \langle w, y\rangle x\rangle \\
&= \langle y, w\rangle \langle v, x\rangle = \langle \langle v, x\rangle y, w\rangle \\
&= \langle (y \otimes x)v, w\rangle.
\end{aligned}$$

2. Soient $\Omega = (e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H et $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I}$ une famille bornée de nombres complexes. L'adjoint de l'opérateur diagonal $D \in \mathcal{B}(H)$ associé à la famille α est un opérateur diagonal associé à la base Ω et à la famille $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha_i})_{i\in I}$.

   En effet, pour tous $x \in H$ et $j \in I$, on a

$$\begin{aligned}\langle D^* e_j, x\rangle &= \langle e_j, Dx\rangle = \langle e_j, \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle \alpha_i e_i\rangle \\ &= \sum_{i\in I}\overline{\alpha_i}\langle e_i, x\rangle\langle e_j, e_i\rangle \\ &= \overline{\alpha_j}\langle e_j, x\rangle.\end{aligned}$$

Proposition 3.1.3. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H, K)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors*

(i) $(\alpha A + B)^* = \overline{\alpha} A^* + B^*$, $(AB)^* = B^* A^*$ *et* $A^{**} = A$.

(ii) *A est inversible si, et seulement si, A^* l'est. Dans ce cas,* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

(iii) $\|A\| = \|A^*\| = \|A^* A\|^{1/2}$.

(iv) $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, y\rangle| : (x, y) \in H \times K,\ \|x\| = \|y\| = 1\}$.

Preuve. (i) et (ii) sont faciles à vérifier.

(iii) Soit $x \in H$ tel que $\|x\| \leq 1$, on a

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^* Ax, x\rangle \leq \|A^* A\| \|x\| \leq \|A^* A\|,$$

et donc $\|A\|^2 \leq \|A^* A\| \leq \|A^*\| \|A\|$. Par suite, $\|A\| \leq \|A^*\|$. Par dualité, on trouve aussi $\|A^*\| \leq \|A^{**}\| = \|A\|$. D'où l'égalité.

(iv) Posons $M = \sup\{|\langle Ax, y\rangle| : (x, y) \in H \times K,\ \|x\| = \|y\| = 1\}$. Comme $|\langle Ax, y\rangle| \leq \|A\|\|x\|\|y\|$ pour tout $(x, y) \in H \times K$, alors $M \leq \|A\|$. D'autre part, pour tout $x \in H$ de norme 1, on a $\|Ax\| = 0$ si $Ax = 0$, et $\|Ax\| = \langle Ax, A(\frac{1}{\|Ax\|}x)\rangle$ sinon ; et donc $\|Ax\| \leq M$. D'où $\|A\| \leq M$. $\square$

Proposition 3.1.4. *Soit $A \in \mathcal{B}(H, K)$, alors*

(i) $\mathrm{N}(A) = \mathrm{R}(A^*)^\perp$ *et* $\mathrm{N}(A^*) = \mathrm{R}(A)^\perp$.

(ii) $\mathrm{N}(A^*A) = \mathrm{N}(A)$ *et* $\overline{\mathrm{R}(A^*A)} = \overline{\mathrm{R}(A^*)}$.

Preuve. (i) Pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{N}(A) &\Leftrightarrow Ax = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = 0 \quad \forall y \in K \\ &\Leftrightarrow x \in \mathrm{R}(A^*)^\perp. \end{aligned}$$

D'où $\mathrm{N}(A) = \mathrm{R}(A^*)^\perp$. Il en résulte que $\mathrm{N}(A^*) = \mathrm{R}(A^{**})^\perp = \mathrm{R}(A)^\perp$.

(ii) Clairement, on a $\mathrm{N}(A) \subseteq \mathrm{N}(A^*A)$. D'autre part, on a

$$A\mathrm{N}(A^*A) \subseteq \mathrm{N}(A^*) \cap \mathrm{R}(A) = \mathrm{R}(A)^\perp \cap \mathrm{R}(A) = \{0\},$$

et donc $\mathrm{N}(A^*A) \subseteq \mathrm{N}(A)$. D'où l'égalité. Il vient ensuite que

$$\overline{\mathrm{R}(A^*A)} = \mathrm{N}(A^*A)^\perp = \mathrm{N}(A)^\perp = \overline{\mathrm{R}(A^*)}.$$

Cela termine la preuve. □

Corollaire 3.1.5. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, alors*

(i) *A est injectif à image fermée si, et seulement si, A^* est surjectif.*

(ii) *A est surjectif si, et seulement si, A^* est injectif à image fermée.*

(iii) $\sigma(A) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}$.

3.2. Opérateurs auto-adjoints et opérateurs normaux

On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est

1. *auto-adjoint* si $A = A^*$;
2. *normal* si $A^*A = AA^*$.

Exemple 3.2.1.

1. Soit $e \in H$ non nul, alors l'opérateur $P = e \otimes e$ de rang 1 est auto-adjoint.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, l'opérateur λI est normal mais pas auto-adjoint.

Proposition 3.2.2. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, alors*

$$A \text{ est auto-adjoint} \quad \Leftrightarrow \quad \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}\ \forall x \in H.$$

Preuve. Supposons que A est auto-adjoint. Soit $x \in H$, on a

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle},$$

et donc $\langle Ax, x\rangle$ est un nombre réel.

Réciproquement, supposons que $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$. Soient $x, y \in H$ et $c \in \mathbb{C}$. On a

$$\langle A(x+cy), x+cy\rangle = \langle Ax, x\rangle + \bar{c}\langle Ax, y\rangle + c\langle Ay, x\rangle + |c|^2\langle Ay, y\rangle \in \mathbb{R}.$$

Donc $\bar{c}\langle Ax, y\rangle + c\langle Ay, x\rangle$ est réel, et par suite

$$\bar{c}\langle Ax, y\rangle + c\langle Ay, x\rangle = \overline{\bar{c}\langle Ax, y\rangle + c\langle Ay, x\rangle} = c\langle A^*y, x\rangle + \bar{c}\langle A^*x, y\rangle.$$

En prenant $c = 1$ et $c = i$, on obtient $\langle Ax, y\rangle = \langle A^*x, y\rangle$. D'où, $A = A^*$. $\square$

Proposition 3.2.3. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur auto-adjoint, alors*

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H,\ \|x\| = 1\}.$$

Preuve. Posons $M = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H,\ \|x\| = 1\}$. Clairement, on a $M \leq \|A\|$.

Soient $x, y \in H$ de norme 1. On a

$$\langle A(x \pm y), x \pm y\rangle = \langle Ax, x\rangle \pm 2\mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, y\rangle,$$

et donc $\langle A(x + y), x + y\rangle - \langle A(x - y), x - y\rangle = 4\mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle$. Comme $|\langle Az, z\rangle| \leq M\|z\|^2$ pour tout $z \in H$, on trouve par l'identité du parallélogramme que

$$\begin{aligned} 4\mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle &\leq M\left(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\right) \\ &= 2M\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 4M, \end{aligned}$$

et par suite $\mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle \leq M$. Il vient donc

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle \leq M\|Ax\|,$$

et par conséquent $\|Ax\| \leq M$. D'où, $\|A\| \leq M$. $\square$

Corollaire 3.2.4. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ vérifiant $\langle Ax, x\rangle = 0$ pour tout $x \in H$. Alors $A = 0$.*

Proposition 3.2.5. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur auto-adjoint, alors*

$$\mathrm{r}(A) = \|A\| \quad \textit{et} \quad \sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|] \subseteq \mathbb{R},$$

où $\mathrm{r}(A)$ *désigne le rayon spectral de A.*

Preuve. On a $\|A^2\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$, et donc par récurrence on vérifie facilement que $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$ pour tout $n \in N$. Il vient donc

$$\mathrm{r}(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|A^{2^n}\|^{1/2^n} = \|A\|.$$

Comme $\sigma(A) \subseteq \overline{\mathbb{D}}(0, \|A\|)$, alors il suffit de montrer que $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Soient $\lambda = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ et $x \in H$. On a

$$\|(A - \lambda)x\|^2 = \|(A - a)x\|^2 + b^2\|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle (A - a)x, \mathrm{i}bx\rangle.$$

Vu que $A-a$ est auto-adjoint, il vient que $\langle (A-a)x, x\rangle \in \mathbb{R}$, et donc $\mathrm{Re}\langle (A-a)x, \mathrm{i}bx\rangle = 0$. D'où, $\|(A-\lambda)x\|^2 = \|(A-a)x\|^2 + b^2\|x\|^2 \geq b^2\|x\|^2$. De même, en prenant $\overline{\lambda}$ et $A^* = A$, on a aussi

$$\|(A^* - \overline{\lambda})x\|^2 \geq b^2\|x\|^2.$$

Si $b \neq 0$, alors $A-\lambda$ et $A-\overline{\lambda}$ sont injectifs à image fermée, et cela implique que A est inversible. D'où $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. $\square$

La *partie réelle* et la *partie imaginaire* d'un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ sont définies respectivement par

$$\frac{1}{2}(A + A^*) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\mathrm{i}}(A - A^*).$$

Ce sont deux opérateurs auto-adjoints et $A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \mathrm{i}\frac{1}{2\mathrm{i}}(A - A^*)$.

Théorème 3.2.6. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est normal ;*

(ii) $\|Ax\| = \|A^*x\|$ *pour tout $x \in H$;*

(iii) *La partie réelle et la partie imaginaire de A commutent.*

Preuve. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) vient du fait que, pour tout $x \in H$, on a

$$\|Ax\|^2 - \|A^*x\|^2 = \langle (A^*A - AA^*)x, x\rangle.$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) découle du fait que

$$A^*A = B^2 - \mathrm{i}CB + \mathrm{i}BC + C^2 \quad \text{et} \quad AA^* = B^2 + \mathrm{i}CB - \mathrm{i}BC + C^2,$$

où $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$ et $C = \frac{1}{2\mathrm{i}}(A - A^*)$. $\square$

Notons que si $A \in \mathcal{B}(H)$ est normal, alors il en est de même pour $A + \alpha I$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

Corollaire 3.2.7. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal. Alors*

(i) $\mathrm{N}(A) = \mathrm{N}(A^*) = \mathrm{N}(A^2)$.

(ii) *A est inversible si, et seulement si, A est injectif à image fermée.*

(iii) $\mathrm{N}(A - \alpha) \perp \mathrm{N}(A - \beta)$ *pour tous complexes $\alpha \neq \beta$.*

Preuve. (i) D'après le théorème précédent, on a $\mathrm{N}(A) = \mathrm{N}(A^*)$. Comme

$$\mathrm{N}(A) \cap \mathrm{R}(A) = \mathrm{N}(A^*) \cap \mathrm{R}(A) = \mathrm{R}(A)^{\perp} \cap \mathrm{R}(A) = \{0\},$$

alors $\mathrm{a}(A) \leq 1$, et par suite $\mathrm{N}(A) = \mathrm{N}(A^2)$.

(ii) Si A est injectif à image fermée, alors

$$R(A) = \overline{R(A)} = N(A^*)^\perp = N(A)^\perp = \{0\}^\perp = H.$$

D'où A est inversible.

(iii) Il est facile de vérifier que $(A - \alpha I)_{|N(A-\beta)} = (\beta - \alpha)I$, et donc $N(A - \beta I) \subseteq R(A - \alpha I)$. Mais, puisque

$$N(A - \alpha I) = N((A - \alpha I)^*) = R(A - \alpha I)^\perp,$$

alors $N(A - \beta I) \perp N(A - \alpha I)$. □

Proposition 3.2.8. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal, alors* $\mathrm{r}(A) = \|A\|$. *En particulier, il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que* $|\lambda| = \|A\|$.

Preuve. Comme A^*A est auto-adjoint, d'après la preuve de la Proposition 3.2.5, on a $\|(A^*A)^{2^n}\| = \|A^*A\|^{2^n}$, et donc $\|A^{2^n}\|^2 = \|(A^*A)^{2^n}\| = \|A^*A\|^{2^n} = \|A\|^{2^{n+1}}$ pour tout $n \geq 1$. D'où $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$, et par suite $\mathrm{r}(A) = \|A\|$. $\square$

Un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est dit *quasi-nilpotent* si $\sigma(T) = \{0\}$. Dans ce cas, son rayon spectral est évidemment nul.

Corollaire 3.2.9. *Tout opérateur normal et quasi-nilpotent dans $\mathcal{B}(H)$ est nul.*

3.3. Projections orthogonales et isométries

On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est :

1. une *projection orthogonale* si $A^2 = A$ et $N(A) = R(A)^\perp$;
2. *unitaire* si $A^*A = AA^* = I$;
3. une *isométrie* si $\|Ax\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$;
4. une *isométrie partielle* si $\|Ax\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{N}(A)^\perp$.

Notons que tout isométrie est injective à image fermée, et toute isométrie partielle est à image fermée.

Proposition 3.3.1. *Soit $P \in \mathcal{B}(H)$ un idempotent non nul. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *P est une projection orthogonale ;*

(ii) *$\|P\| = 1$;*

(iii) *$\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$ pour tout $x \in H$;*

(iv) *P est auto-adjoint ;*

(v) *P est normal.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Comme $P^2 = P$, alors $\|P\| \geq 1$. Soit $x = x_1 + x_2$ suivant la décomposition orthogonale $H = \mathrm{N}(P) \oplus \mathrm{R}(P)$, on a

$$\|Px\|^2 = \|x_2\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2,$$

et donc $\|Px\| \leq \|x\|$. D'où $\|P\| \leq 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $x = x_1 + x_2$ suivant la décomposition $H = \mathrm{N}(P) \oplus \mathrm{N}(P)^{\perp}$. Comme $x_2 - Px_2 \in \mathrm{R}(I - P) = \mathrm{N}(P)$, alors

$$0 = \langle x_2 - Px_2, x_2 \rangle = \|x_2\|^2 - \langle Px_2, x_2 \rangle,$$

et par suite $\|x_2\|^2 = \langle Px_2, x_2 \rangle \leq \|Px_2\| \|x_2\| \leq \|x_2\|^2$. Il en résulte que

$$\|x_2\|^2 = \langle Px_2, x_2 \rangle = \|Px_2\|^2,$$

et par conséquent

$$\|x_2 - Px_2\|^2 = \|x_2\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle Px_2, x_2 \rangle + \|Px_2\|^2 = 0.$$

D'où $x_2 = Px_2$. Il vient donc que

$$\langle Px, x \rangle = \langle Px_2, x_1 + x_2 \rangle = \langle x_2, x_1 + x_2 \rangle = \|x_2\|^2 = \|Px_2\|^2 = \|Px\|^2.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) sont évidentes.

(v) $\Rightarrow$ (i). On a $\mathrm{N}(P) = \mathrm{N}(P^*) = \mathrm{R}(P)^{\perp}$. $\square$

Proposition 3.3.2. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est une isométrie ;*

(ii) $A^*A = I$;

(iii) $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ *pour tous* $x, y \in H$.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Pour tout $x \in H$, on a

$$\langle (A^*A - I)x, x\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle - \langle x, x\rangle = \|Ax\|^2 - \|x\|^2 = 0.$$

D'où $A^*A = I$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Pour tous $x, y \in H$, on a

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*Ax, y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) est évidente. □

Soit $A \in \mathcal{B}(H)$. On dit qu'un sous-espace fermé M de H est *A-réduisant* s'il est invariant par A et A^* ; i.e. $AM \subseteq M$ et $A^*M \subseteq M$.

On note que si $AM \subseteq M$, alors $A^*M^\perp \subseteq M^\perp$. Par conséquent, M est A-réduisant si, et seulement si, $AM \subseteq M$ et $AM^\perp \subseteq M^\perp$.

Proposition 3.3.3. *Soit $U \in \mathcal{B}(H)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *U est une isométrie partielle ;*

(ii) *U^*U est une projection orthogonale d'image $\mathrm{N}(U)^\perp$;*

(iii) *$UU^*U = U$.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Comme U^*U est auto-adjoint et $\mathrm{N}(U)$ est U^*U-invariant, alors $\mathrm{N}(U)^\perp$ est U^*U-invariant. Soit $x \in \mathrm{N}(U)^\perp$, alors $\|Ux\| = \|x\|$ et

$$\langle U^*Ux - x, x\rangle = \langle Ux, Ux\rangle - \langle x, x\rangle = \|Ux\|^2 - \|x\|^2 = 0.$$

D'où $U^*U_{|\mathrm{N}(U)^\perp} = I$. En d'autres termes, $U^*U = 0 \oplus I$ suivant $H = \mathrm{N}(U) \oplus \mathrm{N}(U)^\perp$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Clairement, l'égalité $UU^*U = U$ est vérifiée sur $\mathrm{N}(U)$. Sur $\mathrm{N}(U)^\perp$ on a $U^*U_{|\mathrm{N}(U)^\perp} = I$ et donc $UU^*U_{|\mathrm{N}(U)^\perp} = U_{|\mathrm{N}(U)^\perp}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Comme $\mathrm{N}(U)^\perp = \overline{\mathrm{R}(U^*)}$, alors par continuité il suffit de montrer que $\|Uy\| = \|y\|$ pour tout $y \in \mathrm{R}(U^*)$. Soit $y = U^*x$ avec $x \in H$, vu que $U^*UU^* = U^*$ on trouve

$$\|y\|^2 = \langle y, y\rangle = \langle U^*x, y\rangle = \langle U^*UU^*x, y\rangle = \langle Uy, Uy\rangle = \|Uy\|^2.$$

D'où le résultat. □

Corollaire 3.3.4. *Soit $U \in \mathcal{B}(H)$, alors U est une isométrie partielle si, et seulement si, U^* l'est aussi.*

3.4. Racine carrée et décomposition polaire

On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est positif, et on note $A \geq 0$, si

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H.$$

Remarque 3.4.1. Soient $A \in \mathcal{B}(H)$, alors

(i) A^*A et AA^* sont toujours positifs.

(ii) Si A est positif, alors $A = A^*$ et $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$.

(iii) Si A est positif, alors A^n l'est aussi car

$$\langle A^n x, x \rangle = \begin{cases} \langle AA^p x, A^p x \rangle \text{ si } n = 2p + 1, \\ \langle A^p x, A^p x \rangle \text{ si } n = 2p. \end{cases}$$

Proposition 3.4.2. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur positif, alors $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.*

Preuve. Puisque A est automatiquement auto-adjoint, on a $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \sigma(A)$ non nul, alors $A - \alpha$ n'est pas injectif à image fermée, et donc il existe une suite $(x_n)_n$ dans H telle que $\|x_n\| = 1$, pour tout $n \geq 0$, et $\lim_{n\to\infty}(A - \alpha)x_n = 0$. Si $\alpha < 0$, alors

$$\|(A-\alpha)x_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 - 2\alpha\langle Ax_n, x_n\rangle + \alpha^2 \geq \alpha^2$$

car $\langle Ax_n, x_n\rangle \geq 0$, ce qui contredit $\lim_{n\to\infty}(A - \alpha)x_n = 0$. □

Le commutant d'un sous-ensemble $\Omega \subseteq \mathcal{B}(H)$ est

$$\Omega^c = \{T \in \mathcal{B}(H) : TS = ST \ \forall S \in \Omega\}$$

Lemme 3.4.3. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur positif tel que $\|A\| \leq 1$. Alors*

$$1 - A \geq 0 \quad \textit{et} \quad \|1 - A\| \leq 1.$$

Preuve. Vu que $\|A\| = \sup_{\|x\|=1}\langle Ax, x\rangle \leq 1$, il vient que, pour tout $x \in H$,

$$\langle (1 - A)x, x\rangle = \|x\|^2 - \langle Ax, x\rangle = \|x\|^2 (1 - \langle Ay, y\rangle) \geq 0,$$

avec $y = \frac{1}{\|x\|}x$. D'où, $1 - A$ est positif, et par conséquent

$$\|1 - A\| = \sup_{\|x\|=1}\langle (1 - A)x, x\rangle = \sup_{\|x\|=1}(1 - \langle Ax, x\rangle) \leq 1.$$

Cela termine la preuve. $\square$

Lemme 3.4.4. *Soit* $f(z) = \sqrt{1-z}$ *sur* $\mathrm{D}(0,1)$. *Alors, le développement en série entière de* f *converge absolument sur* $\overline{\mathrm{D}}(0,1)$.

Preuve. La fonction f étant holomorphe sur $\mathrm{D}(0,1)$, on a donc $f(z) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ pour tout $z \in \mathrm{D}(0,1)$, et la convergence est absolue sur $\mathrm{D}(0,1)$. Vu les dérivées de f

$$f^{(k)}(z) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \ldots \times \frac{2k-3}{2} \times (1-z)^{\frac{1}{2}-k},$$

on trouve que $f^{(k)}(0) < 0$, donc $c_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il vient que

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} c_n = \lim_{t \to 1^-} \sum_{n=1}^{N} c_n t^n \leq \lim_{t \to 1^-} \sqrt{1-t} = 1.$$

D'où, $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \leq 1$. □

Remarque 3.4.5. Comme $f(z)^2 = 1 - z$ et la convergence est absolue sur $\overline{\mathbb{D}}(0,1)$, alors $(\sum_{n\geq 1} c_n z^n)^2$ converge absolument sur $\overline{\mathbb{D}}(0,1)$, et donc

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n\right)^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = -z,$$

i.e. $c_1 = 1/2$ et $\sum_{\substack{p+q=m \\ p,q\geq 1}} c_p c_q = 2c_m$ pour tout $m \geq 2$.

Théorème 3.4.6 (Racine carrée d'un opérateur positif). *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur positif. Alors, il existe un opérateur positif unique $B \in \mathcal{B}(H)$ tel que $B^2 = A$. De plus, B est limite de polynômes en A et $\{A\}^c \subseteq \{B\}^c$.*

L'opérateur B est appelé la racine carrée de A, et on le note $\sqrt{A}$ ou $A^{\frac{1}{2}}$

Preuve. Quitte à considérer $\frac{1}{\|A\|}A$, on peut supposer que $\|A\| \leq 1$. Alors, $1 - A \geq 0$ et $\|1 - A\| \leq 1$.

Existence : D'après le Lemme précédent, on définit bien un opérateur borné $B \in \mathcal{B}(H)$ par

$$B = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n (1 - A)^n.$$

De plus, B est limite de polynômes en A, et donc $\{A\}^c \subseteq \{B\}^c$. Comme la série définissant B converge absolument en norme, alors d'après la remarque précédente, on a $B^2 = 1 - (1 - A) = A$.

Positivité : Soit $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}\langle Bx, x\rangle &= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle (1-A)^n x, x\rangle \\ &= \|x\|^2 \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle (1-A)^n u, u\rangle\right),\end{aligned}$$

où $u = \|x\|^{-1} x$. Comme $1 - A$ est positif, il en est de même pour $(1-A)^n$, et donc

$$\langle (1-A)^n u, u\rangle \leq \|1 - A\|^n \|u\| \|u\| \leq 1.$$

D'où, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle (1-A)^n u, u\rangle \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \leq 1$, et donc $\langle Bx, x\rangle \geq 0$.

Unicité : Supposons qu'il existe un autre opérateur positif $C \in \mathcal{B}(H)$ tel que $C^2 = A$. Comme $AC = CA$, il vient que $BC = CB$, et par suite $(C-B)(C+B) = C^2 - B^2 = 0$. Soit $x \in H$, il vient alors que

$$\langle (C-B)^2 Cx, x\rangle + \langle (C-B)^2 Bx, x\rangle = \langle (C-B)^2 (C+B)x, x\rangle = 0.$$

Mais, $C \geq 0$ et $C - B = (C-B)^*$, donc

$$\langle (C-B)^2 Cx, x\rangle = \langle C(C-B)x, (C-B)x\rangle \geq 0,$$

et de même $\langle (C-B)^2 Bx, x\rangle \geq 0$. D'où,

$$\langle (C-B)^2 Cx, x\rangle = \langle (C-B)^2 Bx, x\rangle = 0.$$

Cela signifie que $(C-B)^2 C = (C-B)^2 B = 0$. Il vient donc que $(C-B)^3 = (C-B)^2 C - (C-B)^2 B = 0$ et $\|C-B\| = r(C-B) = 0$, ce qui donne $C = B$. $\square$

Le *module* d'un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est défini par $|A| = \sqrt{A^*A}$.

Remarquons que $|A|$ est un opérateur positif, et donc auto-adjoint. De plus, $\||A|x\| = \|Ax\|$ pour tout $x \in H$, car

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \\ &= \langle |A|^2x, x\rangle = \langle |A|x, |A|x\rangle = \||A|x\|^2.\end{aligned}$$

En particulier, on a $\mathrm{N}(|A|) = \mathrm{N}(A)$.

Exemple 3.4.7. 1. Soit $x, y \in H$ non nuls, et considérons l'opérateur $F = x \otimes y$. Alors, le module de F est $|F| = \frac{||x||}{||y||} y \otimes y$. En effet, on a

$$F^* F = (y \otimes x)(x \otimes y) = \langle x, x \rangle y \otimes y = ||x||^2 y \otimes y,$$

et

$$\left(\frac{||x||}{||y||} y \otimes y \right)^2 = \frac{||x||^2}{||y||^2} \langle y, y \rangle y \otimes y = ||x||^2 y \otimes y.$$

2. Pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint, on a $|T| = T$.

Théorème 3.4.8 (Décomposition polaire). *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, alors il existe une isométrie partielle $U \in \mathcal{B}(H)$ telle que $A = U|A|$. De plus, U est unique s'elle vérifie de plus* $\mathrm{N}(U) = \mathrm{N}(A)$ *; dans ce cas on appelle $A = U|A|$ la décomposition polaire de A.*

Preuve. Puisque $\mathrm{N}(|A|) = \mathrm{N}(A)$, on définit bien une application linéaire de $\mathrm{R}(|A|)$ dans $\mathrm{R}(A)$ par $|A|x \mapsto Ax$. C'est une isométrie qui se prolonge par continuité en une isométrie $V : \overline{\mathrm{R}(|A|)} \to \overline{\mathrm{R}(A)}$. Soit P la projection orthogonale sur $\mathrm{N}(A)^{\perp} = \mathrm{N}(|A|)^{\perp} = \overline{\mathrm{R}(|A|)}$ et posons $U = VP$. Alors, U est une isométrie partielle, car $\mathrm{N}(U) = \mathrm{N}(P) = \mathrm{N}(A)$, qui vérifie $U|A| = VP|A| = V|A| = A$.

Supposons qu'il existe une autre isométrie partielle $W \in \mathcal{B}(H)$ qui vérifie $A = W|A|$ et $\mathrm{N}(W) = \mathrm{N}(A)$. On a donc $W = U$ sur $\overline{\mathrm{R}(|A|)}$. Vu que

$$\mathrm{R}(|A|)^{\perp} = \mathrm{N}(|A|) = \mathrm{N}(A) = \mathrm{N}(U) = \mathrm{N}(W),$$

on obtient $W = U$. $\square$

Proposition 3.4.9. *Soient $A \in \mathcal{B}(H)$ et $A = U|A|$ la décomposition polaire de A. Alors*

$$U^*U|A| = |A|, \; U^*A = |A|, \; UU^*A = A \text{ et } U|A|U^* = |A^*|.$$

Preuve. Comme U^*U est une projection orthogonale sur $\mathrm{N}(U)^\perp = \overline{\mathrm{R}(|A|)}$, alors

$$U^*U|A| = |A|.$$

Par suite, on trouve que

$$U^*A = U^*U|A| = |A| \quad \text{et} \quad UU^*A = UU^*U|A| = U|A| = A.$$

Comme $(U|A|U^*)^2 = U|A|U^*U|A|U^* = U|A|^2U^* = AA^* = |A^*|^2$, alors $U|A|U^* = |A^*|$ car se sont deux opérateur positifs. □

Corollaire 3.4.10. *Un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est compact si, et seulement si, $|A|$ est compact.*

3.5. Décomposition d'un opérateur compact normal

On rappelle que H est somme hilbertienne d'une famille $(H_i)_{i\in I}$ de sous-espaces fermés et orthogonaux deux à deux si l'espace engendré par la réunion des H_i est dense dans H ; on écrit $H = \oplus_{i\in I} H_i$. Dans ce cas, pour tout $x \in H$, on a

$$x = \sum_{i\in I} P_i x \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i\in I} \|P_i x\|^2,$$

où $P_i \in \mathcal{B}(H)$ est la projection orthogonale sur H_i.

Théorème 3.5.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur compact et normal de spectre $\sigma(T) = \{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ où $\lambda_0 = 0$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$ et $(|\lambda_n|)_n$ est décroissante vers zéro ; et soit P_n la projection orthogonale sur $\mathrm{N}(T-\lambda_n)$ pour tout $n \geq 0$. Alors*

$$H = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{N}(T-\lambda_n) \quad \textit{et} \quad T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n,$$

où la série converge en norme vers T.

Preuve. Posons $F = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{N}(T-\lambda_n)$ qui est un sous-espace fermé bien défini car T est normal. Il est bien clair que $TF \subseteq F$, et comme $TT^* = T^*T$, on a aussi $T^*F \subseteq F$, et donc $TF^\perp \subseteq F^\perp$. En particulier, $T_0 = T_{|F^\perp}$ est normal et compact. Comme $\mathrm{N}(T_0 - \alpha) = \mathrm{N}(T-\alpha) \cap F^\perp = \{0\}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $\sigma_{\mathrm{p}}(T_0) = \emptyset$, et donc $\sigma(T_0) = \{0\}$. Par suite, $T_0 = 0$ et

$F^\perp = \{0\}$, et donc $H = F$.

Soit $x \in H$, on a $x = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x$ et $||x||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} ||P_n x||^2$. Il vient que

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} TP_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x.$$

Posons $T_k = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n P_n$, on a

$$|| \sum_{n=k+1}^{N} \lambda_n P_n x||^2 = \sum_{n=k+1}^{N} |\lambda_n|^2 ||P_n x||^2,$$

et donc

$$\begin{aligned} ||T - T_k||^2 &= \sup_{||x||=1} || \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda_n P_n x||^2 \\ &\leq \sup_{n \geq k+1} |\lambda_n|^2 \sup_{||x||=1} \sum_{n=k+1}^{\infty} ||P_n x||^2 \\ &\leq |\lambda_{k+1}|^2 \underset{k+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

D'où, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ converge en norme vers T. $\square$

Notons que si $P \in \mathcal{B}(H)$ est une projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie et de base orthonormale $\{e_1, \ldots, e_n\}$, alors $P = \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes e_k$.

Corollaire 3.5.2. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur compact et normal. Alors H admet une base orthonormale formée de vecteurs propres de T. De plus, il existe une suite $\{\alpha_n\}_{n\geq 1} = \sigma(T) \setminus \{0\}$ et une base orthonormale $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de $\mathrm{N}(T)^{\perp}$ formée de vecteurs propres de T tels que*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \otimes e_n,$$

où la série converge en norme vers T et $Te_n = \alpha_n e_n$ pour tout $n \geq 1$. En particulier, si T est auto-adjoint alors la suite $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ est réelle ; et si T est injectif alors H est séparable.

Preuve. D'après le théorème précédent, on a

$$H = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{N}(T - \lambda_n) \quad \text{et} \quad T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n.$$

Il vient que la réunion des bases orthonormales des $\mathrm{N}(T - \lambda_n)$ est une base orthonormale de H formée de vecteurs propres de T. Posons $d_0 = 0$ et $d_n = \dim \mathrm{N}(T - \lambda_n)$ pour $n \geq 1$. Soient $\{e_{d_{i-1}+1}, \ldots, e_{d_{i-1}+d_i}\}$ une base orthonormale de $\mathrm{N}(T - \lambda_i)$ et $\alpha_k = \lambda_i$ pour $d_{i-1} + 1 \leq k \leq d_{i-1} + d_i$ et $i \geq 1$. On a donc

$$\lambda_i P_i = \sum_{k=d_{i-1}+1}^{d_{i-1}+d_i} \alpha_k e_k \otimes e_k \quad \text{pour tout } i \geq 1,$$

et par l'associativité des familles sommables, on trouve que $T = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \otimes e_n$. $\square$

Définition 3.5.3. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur compact. On appelle *valeur singulière* de T toute valeur propre de $|T|$

Comme $\sigma_{\mathrm{p}}(|T|) \subseteq \sigma(|T|) \subseteq \mathbb{R}^+$, on note les valeurs singulières non nulles de T par une suite $(\mu_n(T))_{n\geq 1}$ de réels positifs qui décroit vers zéro avec $\operatorname{Card}\{k \in \mathbb{N} : \mu_k(T) = \mu_m(T)\} = \dim \mathrm{N}(|T| - \mu_n)$.

Théorème 3.5.4. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur compact. Alors il existe une base orthonormale $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de $\mathrm{N}(T)^{\perp}$ et une famille orthonormale $\{f_n\}_{n\geq 1}$ dans H telles que*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) f_n \otimes e_n \quad \textit{et} \quad |T| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n e_n \otimes e_n.$$

Preuve. Comme T^*T est un compact auto-adjoint, alors il existe une base orthonormale $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de $\mathrm{N}(T^*T)^{\perp} = \mathrm{N}(T)^{\perp}$ formée de vecteurs propres de T^*T. En particulier, on a $T^*Te_n = |T|^2 e_n = \mu_n(T)^2 e_n$ pour tout $n \geq 1$. Posons $f_n = \mu_n(T)^{-1} T e_n$ pour $n \geq 1$, on a donc

$$\begin{aligned} \langle f_n, f_m \rangle &= \mu_n(T)^{-1}\mu_m(T)^{-1}\langle Te_n, Te_m\rangle \\ &= \mu_n(T)^{-1}\mu_m(T)^{-1}\langle e_n, T^*Te_m\rangle \\ &= \mu_n(T)^{-1}\mu_m(T)\langle e_n, e_m\rangle, \end{aligned}$$

et par suite la famille $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est orthonormale. En complétant la famille $\{e_n\}_{n\geq 1}$ par une base orthonormale de $\mathrm{N}(T)$ pour avoir une base orthonormale de H, on trouve que pour tout $x \in H$, on a $x = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i$ et donc

$$Tx = \sum_i \langle x, e_i \rangle T e_i = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) \langle x, e_n \rangle f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)(f_n \otimes e_n)x.$$

Comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mu_n(T)\langle x, e_n \rangle f_n\|^2 \leq \sup_{n\geq 1} \mu_n(T)^2 \|x\|^2 = \mu_1(T)^2 \|x\|^2 < \infty,$$

alors $T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) f_n \otimes e_n$.

Finalement, puisque $|T| e_n = \mu_n(T) e_n$ pour tout $n \geq 1$, on trouve de même que $|T| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n e_n \otimes e_n$. □