4

Classes de Schatten

Dans toute la suite, H désigne un espace de Hilbert complexe de dimension infinie.

4.1. Introduction

On rappelle que $\ell_p(\mathbb{N})$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$, et que

$$C_{00}(\mathbb{N}) \subseteq \ell_1(\mathbb{N}) \subseteq \ell_2(\mathbb{N}) \subseteq C_0(\mathbb{N}) \subseteq \ell_\infty(\mathbb{N}),$$

où $C_{00}(\mathbb{N})$ est le sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang, et $C_0(\mathbb{N})$ est l'espace de Banach des suites convergentes vers zéro.

Soient $(e_n)_{n\geq 0}$ une famille orthonormale de H et $\Phi : \ell_\infty(\mathbb{N}) \to \mathcal{B}(H)$ l'application linéaire définie par

$$\Phi(a)x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \langle x, e_n \rangle e_n \quad \text{pour tout } x \in H,$$

où $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$. C'est une application bien définie car

$$\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\langle x, e_n\rangle e_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2|\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|a\|_\infty^2\|x\|^2,$$

et donc $\Phi(a)$ est un opérateur borné et $\|\Phi(a)\| \leq \|a\|_\infty$. Mais, comme $\|\Phi(a)e_n\| = |a_n| \leq \|\Phi(a)\|$, alors $\|\Phi(a)\| = \|a\|_\infty$. Cela signifie que Φ est une isométrie.

Il est facile de voir que $\Phi^{-1}(\mathcal{F}(H)) = C_{00}(\mathbb{N})$. Vérifions que $\Phi^{-1}(\mathcal{K}(H)) = C_0(\mathbb{N})$:

Soit $a = (a_n)_n \in C_0(\mathbb{N})$, en posant $\Phi_p(a) = \sum_{n=0}^{p} a_n e_n \otimes e_n$, on trouve que

$$\|\Phi(a) - \Phi_p(a)\| = \sup_{\|x\|=1} \|\sum_{n\geq p+1}^{\infty} a_n\langle x, e_n\rangle e_n\| \leq \sup_{n\geq p+1} |a_n| \to_{p+\infty} 0.$$

D'où, $\Phi(a)$ est limite d'opérateurs de rang fini, donc il est compact. Inversement, soit $b = (b_n)_n \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ tel que $\Phi(b)$

est compact. Il vient que

$$|b_n| = \|\Phi(b)e_n\| \to_{n+\infty} 0,$$

et donc $b \in C_0(\mathbb{N})$.

Question : Quels sont les sous-espaces de $\mathcal{B}(H)$ dont l'image réciproque par Φ correspond à $\ell_1(\mathbb{N})$ ou à $\ell_2(\mathbb{N})$?

4.2. Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Soient $(e_i)_{i\in I}$ et $(e_j)_{j\in J}$ deux bases hilbertiennes de H. Alors, pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$, on a

$$\sum_{i\in I} \|Te_i\|^2 = \sum_{j\in J} \|T^* f_j\|^2 = \sum_{j\in J} \|T f_j\|^2 \in [0, +\infty].$$

En effet, d'après l'égalité de Parseval, on a

$$\sum_{i\in I} \|Te_i\|^2 = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} |\langle Te_i, f_j\rangle|^2 = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} |\langle e_i, T^* f_j\rangle|^2 = \sum_{j\in J} \|T^* f_j\|^2.$$

De même, on trouve que $\sum_{j\in J} \|T f_j\|^2 = \sum_{j\in J} \|T^* f_j\|^2$.

Cela montre que la quantité $\sum_{i\in I} \|Te_i\|^2$ ne dépend pas du choix d'une base hilbertienne de H. On pose alors

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{i\in I} \|Te_i\|^2\right)^{1/2}.$$

Définition 4.2.1. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est de *Hilbert-Schmidt* si $\|T\|_2 < \infty$.

On note par $C_2(H)$ l'ensemble de tous les opérateurs de Hilbert-Schmidt dans $\mathcal{B}(H)$.

Remarque 4.2.2. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$.

(i) $\|T\|_2 = \|T^*\|_2$. En particulier, T est de Hilbert-Schmidt si, et seulement si, T^* l'est aussi.

(ii) $\|T\|_2 = \||T|\|_2$ vu que $\|Tx\| = \||T|x\|$ pour tout $x \in H$. En particulier, T est de Hilbert-Schmidt si, et seulement si, $|T|$ l'est aussi.

Exemple 4.2.3. Soient $F = x \otimes y$ un opérateur de rang 1. Alors, F est de Hilbert-Schmidt et $\|F\|_2 = \|F\|$.

En effet, soit $(e_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne de H, on a

$$\|F\|_2^2 = \sum_{i \in I} \|Fe_i\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle e_i, y \rangle|^2 \|x\|^2 = \|y\|^2 \|x\|^2 = \|F\|^2.$$

Lemme 4.2.4. *Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, on a*

$$\|\lambda T\|_2 = |\lambda|\,\|T\|_2\,,\ \ \|T+S\|_2 \leq \|T\|_2 + \|S\|_2 \ \text{ et } \|T\| \leq \|T\|_2$$

Preuve. La première égalité est évidente. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H.

Montrons que $\|T+S\|_2 \leq \|T\|_2 + \|S\|_2$. D'après l'inégalité de Minkowski, on a

$$\begin{aligned} \|T+S\|_2 &= \left(\sum_{i\in I} \|(T+S)e_i\|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i\in I} (\|Te_i\| + \|Se_i\|)^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{i\in I} \|Te_i\|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i\in I} \|Se_i\|^2\right)^{1/2} = \|T\|_2 + \|S\|_2\,. \end{aligned}$$

Montrons que $\|T\| \leq \|T\|_2$. Soit $x \in H$. On a $x =$

$\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$ et, d'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \|\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle Te_i\| \leq \sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|\|Te_i\| \\ &\leq \left(\sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i\in I}\|Te_i\|^2\right)^{1/2} = \|x\|\,\|T\|_2\,.\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Proposition 4.2.5. $(C_2(H), \|.\|_2)$ *est un espace de Banach.*

Preuve. D'après le lemme précédent, $C_2(H)$ est un espace normé. Soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy dans $C_2(H)$. Comme $\|.\| \leq \|.\|_2$, elle est a fortiori de Cauchy dans $\mathcal{B}(H)$, et donc elle converge vers un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$. Soient $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H et $\varepsilon > 0$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|T_p - T_q\right\|_2 = \left(\sum_{i\in I} \|T_p e_i - T_q e_i\|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon \quad \text{dès que } p, q \geq N.$$

D'où, $\left(\sum_{i\in I} \|T_p e_i - T e_i\|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon$ pour tout $p \geq N$. Ceci prouve que $T_p - T$, et donc aussi T, est de Hilbert-Schmidt et que la suite (T_n) converge vers T pour la norme $\|.\|_2$. $\square$

Proposition 4.2.6. *Les assertions suivantes sont satisfaites :*

(i) $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{C}_2(H)$.

(ii) $\mathcal{F}(H)$ *est dense dans* $(\mathcal{C}_2(H), \|.\|_2)$.

(iii) $\mathcal{C}_2(H) \subseteq \mathcal{K}(H)$.

Preuve. (i) Découle immédiatement du fait que $\mathcal{C}_2(H)$ est un espace vectoriel contenant les opérateurs bornés de rang 1 et le fait que tout opérateur de rang fini est somme d'opérateurs de rang 1.

(ii) Soient $T \in \mathcal{C}_2(H)$, $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H et $\varepsilon > 0$. Comme la famille $(\|Te_i\|^2)_{i\in I}$ est sommable, il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $\sum_{i\in I\setminus J} \|Te_i\|^2 \leq \varepsilon$. Considérons l'opérateur de rang fini $T_J = \sum_{i\in J} Te_i \otimes e_i$. Il vient que

$$\left\|T - T_J\right\|_2^2 = \sum_{i \in I \setminus J} \|Te_i\|^2 \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que $\mathcal{F}(H)$ est dense dans $C_2(H)$ pour la norme $\|.\|_2$.

(iii) On a $C_2(H) = \overline{\mathcal{F}(H)}^{\|.\|_2} \subseteq \overline{\mathcal{F}(H)}^{\|.\|} \subseteq \mathcal{K}(H)$. □

Proposition 4.2.7. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur compact, alors*

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)^2\right)^{1/2}.$$

En particulier, T est de Hilbert-Schmidt si, et seulement si, $(\mu_n(T))_n \in \ell_2(\mathbb{N})$.

Preuve. Écrivons $T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) f_n \otimes e_n$ où $(f_n)_{n\geq 1}$ est une famille orthonormale de H et $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base orthonormale de $\mathrm{N}(T)^{\perp}$ que l'on complète en une base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ de H par une base orthonormale de $\mathrm{N}(T)$. Il vient donc

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{i\in I} \|Te_i\|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)^2\right)^{1/2}.$$

D'où le résultat. □

Proposition 4.2.8. *Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$, alors*

$$\|TS\|_2 \leq \|T\|\,\|S\|_2 \quad \textit{et} \quad \|TS\|_2 \leq \|T\|_2\,\|S\|.$$

En particulier, $C_2(H)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{B}(H)$.

Preuve. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H. On a

$$\|TS\|_2 = \left(\sum_{i\in I} \|TSe_i\|^2\right)^{1/2} \leq \|T\| \left(\sum_{i\in I} \|Se_i\|^2\right)^{1/2} = \|T\|\,\|S\|_2\,,$$

et

$$\|TS\|_2 = \|S^*T^*\|_2 \leq \|S^*\| \, \|T^*\|_2 = \|T\|_2 \, \|S\|.$$

$\square$

4.3. Opérateurs de classe trace

Soient $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H et $T \in \mathcal{B}(H)$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\langle |T|e_i, e_i\rangle &= \sum_{i\in I}\langle |T|^{1/2}e_i, |T|^{1/2}e_i\rangle \\ &= \sum_{i\in I}\||T|^{1/2}e_i\|^2 \\ &= \left\||T|^{1/2}\right\|_2^2. \qquad (4.1)\end{aligned}$$

Donc, la quantité $\sum_{i\in I}\langle |T|e_i, e_i\rangle$ ne dépend pas du choix d'une base hilbertienne de H. On pose alors

$$\|T\|_1 = \sum_{i\in I}\langle |T|e_i, e_i\rangle.$$

Définition 4.3.1. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est de *classe trace*, ou *nucléaire*, si la quantité $\|T\|_1$ est finie.

On note par $C_1(H)$ l'ensemble de tous les opérateurs de classe trace dans $\mathcal{B}(H)$.

Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. D'après (4.1), on a $\|T\|_1 = \left\| |T|^{1/2} \right\|_2^2$, et donc

$$T \in C_1(H) \quad \Leftrightarrow \quad |T|^{1/2} \in C_2(H).$$

Il en résulte que

$$C_1(H) \subseteq C_2(H) \subseteq \mathcal{K}(H).$$

En effet, si $T \in C_1(H)$, alors $|T|^{1/2} \in C_2(H)$. Mais, d'après une décomposition polaire $T = U|T| = U|T|^{1/2}|T|^{1/2}$ et du fait que $C_2(H)$ est un idéal bilatère, on trouve que $T \in C_2(H)$.

Exemple 4.3.2. Soient $F = x \otimes y$ un opérateur de rang 1, alors $\|F\|_1 = \|F\| = \|x\|\|y\|$. En effet, Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H. Comme $|F| = \frac{\|x\|}{\|y\|} y \otimes y$, alors

$$\begin{aligned}
\|F\|_1 &= \sum_{i\in I} \langle |F| e_i, e_i\rangle \\
&= \sum_{i\in I} \frac{\|x\|}{\|y\|} \langle \langle e_i, y\rangle y, e_i\rangle \\
&= \frac{\|x\|}{\|y\|} \sum_{i\in I} |\langle e_i, y\rangle|^2 \\
&= \|x\|\|y\| = \|F\|.
\end{aligned}$$

Dans toute la suite, on note par $\Omega(H)$ la collection de toutes les bases hilbertiennes de H.

Proposition 4.3.3. *Pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$ on a*

$$\|T\|_1 = \sup_{u,v \in \Omega(H)} \sum_i |\langle Tu_i, v_i \rangle|.$$

De plus, si T est de classe trace alors

$$\|T\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T).$$

Preuve. Supposons $\|T\|_1 < \infty$. Alors T est compact, et donc

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) f_n \otimes e_n \quad \text{et} \quad |T| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) e_n \otimes e_n,$$

où $(f_n)_{n\geq 1}$ est une famille orthonormale que l'on complète en une base hilbertienne $(f_i)_i$ de H, et $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base orthonormale de $\mathrm{N}(T)^\perp = \mathrm{N}(|T|)^\perp$ que l'on complète en une base hilbertienne $(e_i)_i$ de H par une base orthonormale de $\mathrm{N}(|T|)$. Il vient que

$$\|T\|_1 = \sum_i \langle |T|e_i, e_i\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle |T|e_n, e_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T).$$

Soient $u = (u_i)_i$ et $v = (v_i)_i$ deux bases hilbertiennes de H. On a

$$\langle Tu_i, v_i\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)\langle u_i, e_n\rangle\langle f_n, v_i\rangle,$$

et donc

$$\sum_i |\langle Tu_i, v_i\rangle| \leq \sum_i \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)|\langle u_i, e_n\rangle||\langle f_n, v_i\rangle|.$$

Comme

$$\begin{aligned}\sum_i |\langle u_i, e_n\rangle||\langle f_n, v_i\rangle| &\leq \left(\sum_i |\langle u_i, e_n\rangle|^2\right)^{1/2} \left(\sum_i |\langle f_n, v_i\rangle|^2\right)^{1/2} \\ &= \|e_n\|\|f_n\| = 1,\end{aligned}$$

alors

$$\sum_i |\langle Tu_i, v_i\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) < \infty.$$

D'où, $\sup_{u,v\in\Omega(H)} \sum_i |\langle Tu_i, v_i\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\|T\|_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_n, f_n\rangle| \\ &\leq \sum_i |\langle Te_i, f_i\rangle| \leq \sup_{u,v\in\Omega(H)} \sum_i |\langle Tu_i, v_i\rangle|.\end{aligned}$$

D'où l'égalité.

Supposons que $\sup_{u,v\in\Omega(H)} \sum_i |\langle Tu_i, v_i\rangle| < \infty$. En particulier, pour toutes familles orthonormales $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Tu_n, v_n\rangle| < \infty$, et donc $\lim_{n\to+\infty} |\langle Tu_n, v_n\rangle| = 0$. Cela implique que T est compact. D'après ce qui précède, on trouve

$$
\begin{aligned}
T \text{ est compact} \quad &\Rightarrow \quad \|T\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) \leq \sup_{u,v\in\Omega(H)} \sum_i |\langle Tu_i, v_i\rangle| \\
&\Rightarrow \quad \|T\|_1 < \infty \\
&\Rightarrow \quad \sup_{u,v\in\Omega(H)} \sum_i |\langle Tu_i, v_i\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T).
\end{aligned}
$$

D'où le résultat. $\square$

Corollaire 4.3.4. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$, alors*

(i) $\|T\|_1 = \|T^*\|_1 = \||T|\|_1$. *En particulier,*

$$T \in \mathcal{C}_1(H) \quad \Leftrightarrow \quad T^* \in \mathcal{C}_1(H) \quad \Leftrightarrow \quad |T| \in \mathcal{C}_1(H).$$

(ii) $\|T\| \leq \|T\|_1$.

Preuve. (i) On a

$$\|T\|_1 = \sup_{u,v\in\Omega(H)} \sum_i |\langle Tu_i, v_i\rangle| = \sup_{u,v\in\Omega(H)} \sum_i |\langle u_i, T^*v_i\rangle| = \|T^*\|_1\,,$$

et pour une certaine base hilbertienne $(e_i)_i$ de H

$$\|T\|_1 = \sum_i \langle |T|e_i, e_i\rangle = \sum_i \langle |(|T|)|e_i, e_i\rangle = \||T|\|_1\,.$$

(ii) Sans perte de généralité, on peut supposer que $\|T\|_1 < \infty$. Il en résulte que T est compact, et donc $T =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) f_n \otimes e_n$. D'où,

$$\|T\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu_n(T) f_n \otimes e_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) = \|T\|_1 .$$

$\square$

Proposition 4.3.5. $(C_1(H), \|.\|_1)$ *est un espace de Banach.*

Preuve. D'après la proposition précédente, $C_2(H)$ est un espace normé. Soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy dans $C_1(H)$. Comme $\|.\|_1$ est plus fine que $\|.\|$, alors elle est de Cauchy aussi dans $\mathcal{B}(H)$, et donc elle converge vers un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|T_p - T_q\right\|_1 = \sup_{u,v\in\Omega(H)} \sum_i \left|\langle (T_p - T_q)u_i, v_i\rangle\right| \leq \varepsilon \quad \forall p, q \geq N.$$

En particulier, pour toute partie finie d'indices J, on a $\sum_J \left|\langle (T_p - T_q)u_i, v_i\rangle\right| \leq \varepsilon$, et donc $\sum_J \left|\langle (T_p - T)u_i, v_i\rangle\right| \leq \varepsilon$ pour tout $p \geq N$. D'où, $\sum_i \left|\langle (T_p - T)u_i, v_i\rangle\right| \leq \varepsilon$, et par suite $\left\|T_p - T\right\|_1 \leq \varepsilon$ pour tout $p \geq N$. Ceci affirme que $T_p - T$, et donc aussi T, est de classe trace et que la suite $(T_n)_n$ converge vers T pour la norme $\|.\|_1$. $\square$

Proposition 4.3.6. *On a $\mathcal{F}(H) \subseteq C_1(H)$ et $\overline{\mathcal{F}(H)}^{\|.\|_1} = C_1(H)$.*

Preuve. L'inclusion $\mathcal{F}(H) \subseteq C_1(H)$ découle immédiatement du fait que $C_1(H)$ est un espace vectoriel contenant les opérateurs bornés de rang 1 et le fait que tout opérateur de rang fini est somme d'opérateurs de rang 1.

Montrons que $\overline{\mathcal{F}(H)}^{\|.\|_1} = C_1(H)$. Soit $T \in C_1(H)$, et écrivons $T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) f_n \otimes e_n$. Si l'on considère la suite d'opérateurs de rang fini $T_p = \sum_{n=1}^{p} \mu_n(T) f_n \otimes e_n$, on trouve que

$$\left\|T - T_p\right\|_1 = \left\|\sum_{n\geq p+1} \mu_n(T) f_n \otimes e_n\right\|_1 \leq \sum_{n\geq p+1} \mu_n(T) \rightarrow_{p+\infty} 0.$$

Cela prouve que $\mathcal{F}(H)$ est dense dans $C_1(H)$ pour la norme

$\|.\|_1$. $\square$

Proposition 4.3.7. *Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$, alors*

$$||TS||_1 \leq ||T||\,||S||_1 \quad et \quad ||TS||_1 \leq ||T||_1\,||S||.$$

En particulier, $C_1(H)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{B}(H)$.

Preuve. Soit $(e_i)_i$ une base hilbertienne de H. Considérons des décompositions polaires $S = U|S|$ et $TS = W|TS|$. Comme $|TS| = W^*TS = W^*TU|S|$, alors

$$\begin{aligned}
||TS||_1 &= \sum_i \langle |TS|e_i, e_i\rangle = \sum_i \langle |S|^{1/2}e_i, |S|^{1/2}U^*T^*We_i\rangle \\
&\leq \sum_i |||S|^{1/2}e_i||.|||S|^{1/2}U^*T^*We_i|| \\
&\leq \left\||S|^{1/2}\right\|_2 . \left\||S|^{1/2}U^*T^*W\right\|_2 \\
&\leq \left\||S|^{1/2}\right\|_2^2 .||U^*T^*W|| \leq ||S||_1\,||T||.
\end{aligned}$$

Par dualité, on trouve l'autre inégalité. □

Proposition 4.3.8. *On a* $C_1(H) = C_2(H).C_2(H)$.

Preuve. Soit $T \in C_1(H)$, alors $|T|^{1/2} \in C_2(H)$ et comme $T = U|T|^{1/2}|T|^{1/2}$ par une décomposition polaire, on obtient facilement que $T \in C_2(H).C_2(H)$.

Réciproquement, soient $A, B \in C_2(H)$. Pour toutes bases hilbertiennes $(u_i)_i$ et $(v_i)_i$ de H, on a

$$\begin{aligned} \sum_i |\langle ABu_i, v_i\rangle| &= \sum_i |\langle Bu_i, A^* v_i\rangle| \\ &\leq \sum_i ||Bu_i|| ||A^* v_i|| \\ &\leq ||B||_2 \, ||A^*||_2 \,. \end{aligned}$$

D'où, $AB \in C_1(H)$. □

4.4. Trace d'un opérateur de classe trace

Soient $T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) f_n \otimes e_n$ un opérateur de classe trace et $(u_i)_i$ une base hilbertienne de H. Comme les familles $(\langle Tu_i, u_i\rangle)_i$ et $(\langle f_n, u_i\rangle\langle u_i, e_n\rangle)_i$ sont absolument sommables, alors

$$\begin{aligned}\sum_i \langle Tu_i, u_i\rangle &= \sum_i \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)\langle f_n, u_i\rangle\langle u_i, e_n\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) \sum_i \langle f_n, u_i\rangle\langle u_i, e_n\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)\langle f_n, e_n\rangle.\end{aligned}$$

D'où, la quantité $\sum_i \langle Tu_i, u_i\rangle$ ne dépend pas du choix d'une base hilbertienne de H.

Définition 4.4.1. On définit la *trace* d'un opérateur de classe trace $T \in C_1(H)$ par

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_i \langle Tu_i, u_i \rangle.$$

Notons que cette définition coïncide avec la définition usuelle de la trace en dimension finie.

Exemple 4.4.2. Soient $F = x \otimes y$ un opérateur de rang 1 et $(e_i)_i$ une base hilbertienne de H. On a

$$\mathrm{tr}(F) = \sum_i \langle Fe_i, e_i \rangle = \sum_i \langle \langle e_i, y \rangle x, e_i \rangle = \sum_i \langle e_i, y \rangle \langle x, e_i \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Théorème 4.4.3. *La trace* $\mathrm{tr} : C_1(H) \to \mathbb{C}$ *est une forme linéaire bornée de norme* 1 *vérifiant* $\mathrm{tr}(T^*) = \overline{\mathrm{tr}(T)}$ *pour tout* $T \in C_1(H)$*.*

Preuve. Il évident que tr est linéaire. Soient $T \in C_1(H)$ et $(u_i)_i$ une base hilbertienne de H, on a

$$|\mathrm{tr}(T)| \leq \sum_i |\langle Tu_i, u_i\rangle| \leq \|T\|_1 .$$

D'où, tr est bornée et $\|\mathrm{tr}\| \leq 1$. Considérons une projection orthogonale $P = e \otimes e$ de rang 1 ; on a

$$1 = |\mathrm{tr}(P)| \leq \|\mathrm{tr}\|\, \|P\|_1 \leq \|\mathrm{tr}\|,$$

d'où $\|\mathrm{tr}\| = 1$.

Par une décomposition convenable $T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) f_n \otimes e_n$, on a

$$\mathrm{tr}(T^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)\langle e_n, f_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)\overline{\langle f_n, e_n\rangle} = \overline{\mathrm{tr}(T)}.$$

$\square$

Corollaire 4.4.4. *La norme de Hilbert-Schmidt* $\|.\|_2$ *est associée au produit scalaire* $\langle .,.\rangle$ *sur* $C_2(H)$ *défini par* $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^*A)$ *pour tous* $A, B \in C_2(H)$.

Par conséquent, $C_2(H)$ *est un espace de Hilbert.*

Preuve. Comme la trace est linéaire, alors $\langle .,.\rangle$ est linéaire par rapport à la première variable et anti-linéaire par rapport à la deuxième. De plus, pour tous $A, B \in C_2(H)$, on a

$$\overline{\langle A, B\rangle} = \overline{\mathrm{tr}(B^*A)} = \mathrm{tr}((B^*A)^*) = \mathrm{tr}(A^*B) = \langle B, A\rangle,$$

et

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}(A^*A) = \|A\|_2^2 .$$

D'où le résultat. □

Dans l'espace de Hilbert $C_2(H)$, l'identité de polarisation s'écrit

$$\langle A, B\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|A+B\|_2^2 - \|A-B\|_2^2 + \mathrm{i}\,\|A+\mathrm{i}B\|_2^2 - \|A-\mathrm{i}B\|_2^2\Big).$$

On en déduit que

$$\operatorname{tr}(B^*A) = \overline{\operatorname{tr}(BA^*)} \quad \text{pour tous } A, B \in C_2(H).$$

Corollaire 4.4.5. *Soient $T \in \mathcal{C}_1(H)$ et $S \in \mathcal{B}(H)$, alors*

$$\mathrm{tr}(TS) = \mathrm{tr}(ST).$$

Preuve. Comme $\mathcal{C}_1(H) = \mathcal{C}_2(H)\mathcal{C}_2(H)$, il existe $A, B \in \mathcal{C}_2(H)$ tels que $T = AB$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(TS) &= \mathrm{tr}(A(BS)) = \overline{\mathrm{tr}(A^*(S^*B^*))} \\
&= \overline{\mathrm{tr}((SA)^*B^*)} = \mathrm{tr}(SAB) \\
&= \mathrm{tr}(ST).
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.4.6. *Soient* $(x_n)_{1\leq n\leq p}$ *et* $(y_n)_{1\leq n\leq p}$ *deux familles orthonormales. Alors*

$$\|\sum_{n=1}^{p} x_n \otimes y_n\| = 1.$$

Preuve. Posons $F = \sum_{n=1}^{p} x_n \otimes y_n$. Soit $x \in H$, On a

$$\|Fx\|^2 = \sum_{n=1}^{p} |\langle x, y_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

et par suite $\|F\| \leq 1$. Mais $1 = \|x_1\| = \|Fy_1\| \leq \|F\|$, et donc $\|F\| = 1$. □

Proposition 4.4.7. *Soit $T \in \mathcal{C}_1(H)$, alors l'application $\Phi_T : \mathcal{K}(H) \to \mathbb{C}$ définie par $\Phi_T(S) = \mathrm{tr}(ST)$ est une forme linéaire bornée et $\|\Phi_T\| = \|T\|_1$.*

Preuve. La linéarité de Φ_T découle de celle de la trace. Quant à la continuité, on a pour tout $S \in \mathcal{K}(H)$

$$|\Phi_T(S)| = |\mathrm{tr}(ST)| \leq \|ST\|_1 \leq \|S\| \, \|T\|_1 \,,$$

et donc Φ_T est borné et $\|\Phi_T\| \leq \|T\|_1$.

Écrivons $T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) f_n \otimes e_n$ et prenons $T_m = \sum_{n=1}^{m} e_n \otimes f_n$. D'après le lemme précédent, on a $\|T_m\| = 1$. De plus, on a $T_m T = \sum_{n=1}^{m} \mu_n(T) e_n \otimes e_n$, et par suite

$$\Phi_T(T_m) = \mathrm{tr}(T_m T) = \sum_{n=1}^{m} \mu_n(T) \leq \|\Phi_T\|.$$

Par passage à la limite, on trouve que $\|T\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) \leq \|\Phi_T\|$. D'où l'égalité. $\square$

Corollaire 4.4.8. *Soit $T \in C_1(H)$, on a*

$$\begin{aligned}
\|T\|_1 &= \sup\{|\mathrm{tr}(ST)| : S \in \mathcal{F}(H), \|S\| \leq 1\} \\
&= \sup\{|\mathrm{tr}(ST)| : S \in \mathcal{K}(H), \|S\| \leq 1\} \\
&= \sup\{|\mathrm{tr}(ST)| : S \in \mathcal{B}(H), \|S\| \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Théorème 4.4.9. *L'application* $\Phi : \mathcal{C}_1(H) \to \mathcal{K}(H)^*$ *définie par* $\Phi(T) = \Phi_T$ *est un isomorphisme isométrique.*

Preuve. Clairement, Φ est linéaire et, d'après la proposition précédente, on a $\|\phi(T)\| = \|T\|_1$ pour tout $T \in \mathcal{C}_1(H)$.

Il reste à monter que Φ est surjective. Soit $\psi \in \mathcal{K}(H)^*$, alors l'application $(x, y) \in H^2 \mapsto \psi(x \otimes y)$ est une forme sesquilinéaire bornée, et donc il existe $A \in \mathcal{B}(H)$ unique tel que

$$\psi(x \otimes y) = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Soient $(u_i)_i$ et $(v_i)_i$ deux bases hilbertiennes de H. Quitte à remplacer u_i par $\frac{|\langle u_i, Av_i \rangle|}{\langle u_i, Av_i \rangle} u_i$ lorsque $\langle u_i, Av_i \rangle \notin \mathbb{R}^+$, on peut supposer que $\langle u_i, Av_i \rangle \geq 0$ pour tout i. Donc, pour toute partie finie d'indices J, on a

$$\psi(\sum_{i\in J} u_i \otimes v_i) = \sum_{i\in J}\langle u_i, Av_i\rangle \leq \|\psi\|.$$

D'où, la famille $(\langle u_i, Av_i\rangle)_i$ est sommable et $\sum_i\langle u_i, Av_i\rangle \leq \|\psi\|$. Par suite, l'opérateur A, et donc aussi A^*, est de classe trace et $\|A\|_1 = \|A^*\|_1 \leq \|\psi\|$.

Maintenant, pour tous $x, y \in H$, on a

$$\Phi_{A^*}(x \otimes y) = \mathrm{tr}(x \otimes Ay) = \langle x, Ay\rangle = \psi(x \otimes y),$$

et donc par continuité et densité de $\mathcal{F}(H)$ dans $\mathcal{K}(H)$, on trouve que $\Phi(A^*) = \psi$. $\square$

Théorème 4.4.10. *L'application* $\varphi : \mathcal{B}(H) \to (\mathcal{C}_1(H), \|.\|_1)^*$ *définie par* $\varphi(T) = \varphi_T$, *où* $\varphi_T(S) = \mathrm{tr}(ST)$, *est un isomorphisme isométrique.*

Preuve. L'application φ est linéaire, et on a, pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$,

$$|\mathrm{tr}(ST)| \leq \|ST\|_1 \leq \|S\|_1 \, \|T\| \quad \forall S \in \mathcal{C}_1(H).$$

Donc $\|\varphi_T\| \leq \|T\|$. Soient $x \in H$ non nul et $A = T^*x \otimes x$, on a

$$\frac{|\mathrm{tr}(AT)|}{\|A\|_1} = \frac{\|T^*x\|^2}{\|T^*x\|.\|x\|} = \frac{\|T^*x\|}{\|x\|} \leq \|\varphi_T\|.$$

Il en résulte que $\|T^*\| = \|T\| \leq \|\varphi_T\|$. D'où l'égalité.

Il reste à monter que φ est surjective. Soit $f \in (\mathcal{C}_1(H), \|.\|_1)^*$, alors l'application $(x, y) \in H^2 \mapsto f(x \otimes y)$ est une forme sesquilinéaire bornée, et donc il existe $A \in \mathcal{B}(H)$ unique tel que

$$f(x \otimes y) =< x, Ay > \quad \forall x, y \in H.$$

Pour tous $x, y \in H$ on a

$$\varphi_{A^*}(x \otimes y) = \mathrm{tr}(x \otimes Ay) = \langle x, Ay \rangle = f(x \otimes y),$$

donc par continuité et densité de $\mathcal{F}(H)$ dans $(C_1(H), \|.\|_1)$, on trouve que $\varphi(A^*) = f$. $\square$