Faculté des Sciences d'Oujda
Département de Mathématiques
Année : 2018-2019

Master Analyse Fonctionnelle
Semestre : 2
Module : Théorie des opérateurs

Examen de la session normale : 17 Juin 2019
Durée 2h

Note : *On insiste sur la nécessité de fournir des arguments complets, rédigés de façon claire et ordonnée, pour justifier les réponses.*

Dans toute la suite, X (resp. H) désigne un espace de Banach (resp. Hilbert séparable) complexe de dimension infinie.

Exercice 1. Soient $F \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur de rang fini $n \geq 1$, $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur inversible, $z \in X$ et $f \in X^*$ tels que $f(z) = -1$.

(1) Vérifier que F^* est de rang fini, et montrer que $\mathrm{d}(F) \leq n+1$.
(2) Montrer que $F - \lambda I$ est d'ascente et de descente finies pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
(3) Déduire que $\sigma(F) = \sigma_{\mathrm{l}}(F) = \sigma_{\mathrm{r}}(F)$.
(4) Montrer que $\mathrm{R}(T+F)$ est fermé et que $\dim \mathrm{N}(T+F) \leq n$.
(5) Calculer l'ascente de $z \otimes f - \lambda I$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
(6) Déduire $\mathrm{N}(z \otimes f - \lambda I)$ et $\mathrm{R}(z \otimes f - \lambda I)$ en fonction de $\mathrm{N}(f)$ et $\mathrm{Span}\{z\}$ pour tout $\lambda \in \sigma(z \otimes f)$.
(7) Montrer que $T + z \otimes f$ est inversible si, et seulement si, $f(T^{-1}z) \neq -1$.

Exercice 2. Soient $\{e_n\}_{n\geq 1}$ une base hilbertienne de H, $(\alpha)_{n\geq 1}$ une suite bornée de complexes non nuls, et $D, K \in \mathcal{B}(H)$ les opérateurs bornés donnés par

$$K = \sum_{i=1}^{m} e_i \otimes e_{i+1} \quad \text{et} \quad D = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \otimes e_n.$$

(1) Déterminer $\mathrm{N}(K)$ et $\mathrm{R}(K)$.
(2) Montrer que K est une isométrie partielle, et déduire sa décomposition polaire.
(3) Montrer que D est compact si, et seulement si, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.
(4) Déterminer $\sigma_{\mathrm{p}}(D)$, et montrer que D est à image dense dans H.
(5) Montrer que D est de classe trace si, et seulement si, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$.
(6) Vérifier que $|D| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| e_n \otimes e_n$, et déterminer une isométrie $U \in \mathcal{B}(H)$ telle que $D = U|D|$.
(7) Montrer que l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & (\mathcal{C}_2(H), \|.\|_2) & \longrightarrow & (\mathcal{C}_1(H), \|.\|_1) \\ & A & \longmapsto & DAK \end{array}$$

est bornée.