Faculté des Sciences d'Oujda
Département de Mathématiques
Année : 2018-2019

Master Analyse Fonctionnelle
Semestre : 2
Module : Théorie des opérateurs

Examen de la session de rattrapage : 9 Juillet 2019

Durée 2h

Note : *On insiste sur la nécessité de fournir des arguments complets, rédigés de façon claire et ordonnée, pour justifier les réponses.*

Dans toute la suite, X (resp. H) désigne un espace de Banach (resp. Hilbert séparable) complexe de dimension infinie.

Exercice 1. Soit $T \in \mathcal{B}(X) \setminus \{0\}$ non injectif, et considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \tilde{T}: & X/\mathrm{N}(T) & \longrightarrow & X/\mathrm{N}(T) \\ & x+\mathrm{N}(T) & \longmapsto & Tx+\mathrm{N}(T) \end{array}$$

(1) Vérifier que $\mathrm{N}(T)$ est un sous-espace de $\mathrm{N}(T^2)$ et de $\mathrm{R}(T)+\mathrm{N}(T)$.

(2) Montrer que $\tilde{T}$ est une application bien définie et linéaire.

(3) Montrer que $\tilde{T}$ est bornée.

(4) Montrer que $\mathrm{N}(\tilde{T}) = \mathrm{N}(T^2)/\mathrm{N}(T)$ et que $\mathrm{R}(\tilde{T}) = (\mathrm{R}(T)+\mathrm{N}(T))/\mathrm{N}(T)$.

(5) Montrer que $\tilde{T}$ est injectif si, et seulement si, $\mathrm{a}(T) = 1$.

(6) Montrer que $\tilde{T}$ est surjectif si, et seulement si, $\mathrm{d}(T) \leq 1$.

(7) On suppose que $\mathrm{R}(T^2)$ est fermé ; montrer que $\mathrm{R}(T)+\mathrm{N}(T)$ est fermé.

Exercice 2. Soient $\{e_n\}_{n\geq 1}$ une base hilbertienne de H, $\{a_1, a_2\}$ et $\{b_1, b_2\}$ deux familles orthonormales de H, et $F, S \in \mathcal{B}(H)$ les opérateurs bornés donnés par

$$F = a_1 \otimes b_1 - a_2 \otimes b_2 \quad \text{et} \quad Se_{3p+1} = e_{3p+3},\ Se_{3p+2} = Se_{3p+3} = 0 \text{ pour tout } p \geq 0.$$

(1) Calculer F^* et $\|F\|$.

(2) Montrer que F est une isométrie partielle et que $|F| = F^*F$.

(3) Montrer que F est normal si, et seulement si, $\mathrm{Span}\{a_1, a_2\} = \mathrm{Span}\{b_1, b_2\}$.

(4) Montrer que $S^2 = 0$, et que S n'est pas compact.

(5) Calculer S^*e_2 et S^*e_3.

(6) Vérifier que $S + I$ est inversible, et calculer son inverse.

(7) On pose $M = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Montrer que $S_{|M}$ est de rang 2, et de trace nulle.