Université Mohammed Premier

Faculté des sciences d'Oujda

Département de Mathématiques

Master Analyse Fonctionnelle

Semestre 2

Opérateurs Bornés

Notes de cours par le professeur

Khalid SOUILAH

Opérateurs bornés

Khalid SOUILAH

Université Mohammed Premier, Faculté des Sciences, Oujda

Site Web : souilah.heb3.org

Table des matières

1 Opérateurs bornés sur un espace de Banach

Tout au long de ce cours, X et Y dénotent deux espaces de Banach complexes non réduits à zéro.

1.1 Espace des opérateurs bornés

Proposition 1.1.1. *Soit $T : X \to Y$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est continue sur X ;*

(ii) *T est continue en 0 ;*

(iii) *Il existe un réel $c \geq 0$ tel que $\|Tx\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in X$.*

Preuve. Il est évident que (i) implique (ii).

(ii)⇒(iii). Pour $\varepsilon = 1$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $\|x\| \leq \delta$ on ait $\|Tx\| \leq 1$. Soit $x \in X \setminus \{0\}$, alors pour $c = 1/\delta$ on a $\|\frac{1}{c\|x\|}x\| = \delta$, et donc $\|T(\frac{1}{c\|x\|}x)\| = \frac{\|Tx\|}{c\|x\|} \leq 1$. D'où le résultat.

(iii)⇒(i). Soient $y \in X$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\|T(x-y)\| \leq c\|x-y\|$ pour tout $x \in X$, alors il suffit de prendre $\delta = \varepsilon/c$ pour avoir $\|T(x-y)\| \leq \varepsilon$ dès que $\|x-y\| \leq \delta$. □

Toute application linéaire vérifiant l'une des assertions du théorème précédent est dite *opérateur borné*. La norme d'un tel opérateur T est définie par

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}. \tag{1.1}$$

Il est facile de vérifier que :

1. $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ pour tout $x \in X$.
2. $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = \sup\{\|Tx\|/\|x\| : x \neq 0\}$.
3. $\|T\|$ est la plus petite constante c vérifiant (iii) du théorème précédent.

On note par $\mathcal{B}(X, Y)$ l'ensemble de tous les opérateurs bornés de X dans Y. Lorsque $X = Y$, on note simplement $\mathcal{B}(X)$.

Proposition 1.1.2. *Les assertions suivantes sont satisfaites :*

(i) *Si $T, S \in \mathcal{B}(X, Y)$ alors $T + S \in \mathcal{B}(X, Y)$ et $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$.*

(ii) *Si $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ alors $\alpha T \in \mathcal{B}(X, Y)$ et $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$.*

(iii) *Soit Z un espace de Banach complexe. Si $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ et $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$ alors $ST \in \mathcal{B}(X, Z)$ et $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.*

Preuve. (i) Pour tout $x \in X$, on a

$$\|(T + S)x\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq (\|T\| + \|S\|)\|x\|,$$

et donc $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$.

(ii) On a

$$\begin{aligned} \|\alpha T\| &= \sup\{\|\alpha Tx\| : \|x\| = 1\} \\ &= |\alpha| \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} \\ &= |\alpha|\|T\|. \end{aligned}$$

(iii) Pour tout $x \in X$, on a

$$\|STx\| \leq \|S\|\|Tx\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|,$$

ainsi $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$. □

Théorème 1.1.3. *L'application $T \mapsto \|T\|$ est une norme pour laquelle $\mathcal{B}(X, Y)$ est un espace de Banach complexe. En particulier, $\mathcal{B}(X)$ est une algèbre de Banach unitaire.*

Preuve. D'après la proposition précédente, $(\mathcal{B}(X, Y), \|.\|)$ est un espace vectoriel normé. Il reste à montrer qu'il est complet.

Soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}(X)$. Alors, pour tout $x \in X$, la suite $(T_n x)_n$ est de Cauchy dans Y, et donc elle converge vers un vecteur de Y que l'on note Tx. On définit ainsi une application $T : X \to Y$ par $Tx = \lim_n T_n x$. Évidement, c'est une application linéaire. Puisque toute suite de Cauchy est bornée, il existe $c > 0$ tel que $\|T_n\| \leq c$, et donc $\|T_n x\| \leq c\|x\|$ pour tous $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, on trouve que T est borné. Maintenant, soit $\varepsilon > 0$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_p - T_q\| \leq \varepsilon$ dès que $p \geq q \geq N$. Il vient donc que $\|T_p x - T_q x\| \leq \varepsilon\|x\|$ pour tous $p \geq q \geq N$. En faisant tendre p vers l'infini, on obtient $\|T_p - T\| \leq \varepsilon$ dès que $p \geq N$. D'où la résultat. □

Exemple 1.1.4.

1. Considérons les applications linéaires $S_d, S_g : l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$ définies, pour tout $(x_n)_n \in l_2(\mathbb{C})$, par

$$S_d(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots) \quad \text{et} \quad S_g(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots).$$

   Alors S_d (resp. S_g) est un opérateur borné appelé *shift unilatéral à droite* (resp. *gauche*), et on a $\|S_d\| = \|S_g\| = 1$.

2. Soient $\{e_n\}_n$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert H et $(\alpha_n)_n$ une suite de nombres complexes bornée. On considère l'opérateur *diagonal* $D : H \to H$ donné par $De_n = \alpha_n e_n$. Alors D est borné et $\|D\| = \sup_n |\alpha_n|$.

3. Considérons l'espace de Banach E des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0, 1]$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Étant donné $t_0 \in [0, 1]$, l'opérateur $T : E \to E$ défini par $Tf(t) = f(t_0)$, pour tout $t \in [0, 1]$, est borné et $\|T\| = 1$.

On note par B_X la boule unité fermée de X, et par $\mathrm{B}_X(x, r)$ la boule ouverte de X de centre x et rayon r.

Théorème 1.1.5 (Théorème de l'application ouverte)**.** *Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est surjective ;*

(ii) $0 \in \overset{\circ}{\overline{T\mathrm{B}_X}}$;

(iii) $0 \in T\overset{\circ}{\mathrm{B}}_X$.

Preuve. (i)⇒(ii) Comme T est surjectif, on a $Y = \cup_{n>0} nT\mathrm{B}_X = \cup_{n>0} \overline{nT\mathrm{B}_X}$. L'espace Y étant complet, d'après le théorème de Bair, il existe $n > 0$ tel que $\overset{\circ}{\overline{nT\mathrm{B}_X}} \neq \emptyset$, et donc

$\overset{\circ}{\overline{TB_X}} \neq \emptyset$. Soient donc $y \in Y$ et $r > 0$ tels que $B_Y(y, 2r) \subseteq \overline{TB_X}$. En particulier, $y \in \overline{TB_X}$ et par symétrie $-y \in \overline{TB_X}$. Il vient donc que

$$B_Y(0, 2r) = B_Y(y, 2r) + \{-y\} \subseteq \overline{TB_X} + \overline{TB_X} = 2\overline{TB_X},$$

car $\overline{TB_X}$ est convexe. D'où $B_Y(0, r) \subset \overline{TB_X}$.

(ii)⇒(iii) Il existe un réel $c > 0$ tel que $B_Y(0, 4c) \subseteq \overline{TB_X}$. Soit $y \in B_Y(0, c)$, on construit par récurrence une suite (x_n) d'éléments de X telle que pour tout n

$$\|x_n\| \leq 2^{-n-1} \quad \text{et} \quad \|y - T(x_1 + ... + x_n)\| \leq c2^{-n}.$$

Ceci est possible car il existe $x_1 \in X$ tel que $\|x_1\| \leq 1/4$ et $\|y - Tx_1\| \leq c/2$. Ensuite, si $x_1, ..., x_n$ ont été construits on remarque que $\|2^n y - 2^n T(x_1 + ... + x_n)\| \leq c$ et l'on obtient comme précédemment un $x_{n+1} \in X$ tel que

$$\|2^n x_{n+1}\| \leq 1/4 \quad \text{et} \quad \|2^n y - 2^n T(x_1 + ... + x_n) - 2^n Tx_{n+1}\| \leq c/2.$$

Comme la série $\sum x_n$ est absolument convergente, par complétude de X elle converge vers un élément $x \in X$ vérifiant $\|x\| \leq 1/2$. De plus, par continuité de T on a $y = Tx$. Donc $B_Y(0, c) \subseteq \frac{1}{2}TB_X \subseteq TB_X$.

(iii)⇒(i) T est une application ouverte. En effet, il existe un réel $c > 0$ tel que $B_Y(0, c) \subseteq TB_X$. Soient Ω un ouvert non vide de X et $y \in T(\Omega)$. Alors $y = Tx$ avec $x \in \Omega$, et donc il existe $r > 0$ tel que $B_X(x, r) \subseteq \Omega$. Par conséquent,

$$B_Y(y, cr) = rB_Y(0, c) + \{Tx\} \subseteq TB_X(0, r) + \{Tx\} = TB_X(x, r) \subseteq T(\Omega)$$

D'où $T(\Omega)$ est un ouvert. En particulier, TX est un sous-espace ouvert de Y, il existe donc $a > 0$ tel que $B_Y(0, a) \subseteq TX$. Par suite, pour tout $z \in Y$ non nul, on a $\frac{a}{2\|z\|}z \in B_Y(0, a) \subseteq TX$. Ceci signifie que $Y = TX$. □

Corollaire 1.1.6. *Si $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ est bijectif alors $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$.*

Preuve. Il est facile de vérifier que T^{-1} est linéaire. Soit $c > 0$ tel que $B_Y(0, c) \subseteq TB_X$. Comme T est bijectif, on a $T^{-1}B_Y(0, c) \subseteq B_X$, et donc $T^{-1}B_Y$ est borné. □

Théorème 1.1.7 (Théorème du graphe fermé). *Soit $T : X \to Y$ une application linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est borné ;*

(ii) *$G(T) := \{(x, Tx) : x \in X\}$ est un sous-ensemble fermé dans $X \times Y$;*

(iii) *Si (x_n) est une suite convergeant vers zéro et (Tx_n) converge vers $y \in Y$, alors $y = 0$.*

Preuve. Notons $P_1 : X \times Y \to X$ et $P_2 : X \times Y \to Y$ les projections canoniques, ce sont des opérateurs bornés.

(i)⇒(ii) On a $G(T) = \{z \in X \times Y : P_2(z) = TP_1(z)\}$ est un sous-ensemble fermé dans $X \times Y$.

(ii)⇒(iii) Si (x_n) est une suite convergeant vers zéro et (Tx_n) converge vers $y \in Y$, alors (x_n, Tx_n) converge vers $(0, y)$ donc $y = T0 = 0$.

(iii)⇒(i) est évidente. □

Théorème 1.1.8 (Théorème de Banach-Steinhaus)**.** *Soit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ une famille non vide. Si pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{Tx : T \in \mathcal{F}\}$ est borné, alors $\mathcal{F}$ est borné.*

Pour ce théorème classique qui découle du lemme de Bair, on présente une nouvelle démonstration élémentaire fournie par Alan Sokal (2010).

Lemme 1.1.9. *Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Pour tous $x \in X$ et $r > 0$, on a*

$$r\|T\| \leq \sup\{\|Ty\| : y \in \mathrm{B}_X(x, r)\}.$$

Preuve. Pour tout $z \in \mathrm{B}_X(0, r)$, on a

$$\begin{aligned} \|Tz\| &\leq 1/2(\|T(x+z)\| + \|T(x-z)\|) \leq \max\{\|T(x+z)\|, \|T(x-z)\|\} \\ &\leq \sup\{\|Ty\| : y \in \mathrm{B}_X(x, r)\} \end{aligned}$$

D'où, $r\|T\| \leq \sup\{\|Ty\| : y \in \mathrm{B}_X(x, r)\}$. □

Preuve du Théorème 1.1.8. Supposons que $\mathcal{F}$ n'est pas borné, et soit (T_n) une suite de $\mathcal{F}$ telle que $\|T_n\| \geq 4^n$. Il en résulte qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de X vérifiant

$$x_0 = 0, \quad \|x_n - x_{n-1}\| \leq 1/3^n \quad \text{et} \quad 2/3^{n+1}\|T_n\| \leq \|T_n x_n\| \text{ pour tout } n \geq 1.$$

En effet, pour tout $n \geq 1$, le lemme précédent implique que

$$2/3^{n+1}\|T_n\| < 1/3^n\|T_n\| \leq \sup\{\|T_n y\| : y \in \mathrm{B}_X(x_{n-1}, 1/3^n)\}.$$

Par conséquent, il existe $x_n \in \mathrm{B}_X(x_{n-1}, 1/3^n)$ tel que $2/3^{n+1}\|T_n\| \leq \|T_n x_n\|$. D'autre part, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \geq n$, on a

$$\|x_m - x_n\| \leq 1/3^m + 1/3^{m-1} + \cdots + 1/3^{n+1} \leq 1/(2.3^n).$$

En particulier, la suite (x_n) est de Cauchy, et donc elle converge vers un vecteur $x \in X$. En faisant tendre m vers l'infini, on obtient $\|x - x_n\| \leq 1/(2.3^n)$. Il vient alors

$$\begin{aligned} \|T_n x\| &\geq \|T_n x_n\| - \|T_n(x - x_n)\| \geq 2/3^{n+1}\|T_n\| - \|T_n\|\|x - x_n\| \\ &\geq 2/3^{n+1}\|T_n\| - 1/(2.3^n)\|T_n\| = \|T_n\|/(6.3^n) \geq (1/6).(4/3)^n. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que l'ensemble $\{Tx : T \in \mathcal{F}\}$ n'est pas borné, contradiction. □

1.2 Adjoint d'un opérateur borné

On note par $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ le dual topologique de X. Soit $T : X \to Y$ un opérateur borné, on appelle *adjoint* de T, l'application $T^* : Y^* \to X^*$ défini par $T^*(f) = f \circ T$ pour tout $f \in Y^*$.

Proposition 1.2.1. *Soit $T : X \to Y$ un opérateur borné. Alors $T^* : Y^* \to X^*$ est un opérateur borné et $\|T^*\| = \|T\|$.*

Preuve. Pour tout $f \in Y^*$, on a

$$\|T^*(f)\| = \|f \circ T\| \leq \|f\|\|T\|,$$

et donc T^* est borné et $\|T^*\| \leq \|T\|$. Pour tout $x \in X$, on a

$$\|Tx\| = \sup_{f \in Y^*, \|f\| \leq 1} |f(Tx)| = \sup_{f \in Y^*, \|f\| \leq 1} |T^*(f)x| \leq \|T^*\|\|x\|,$$

et par conséquent $\|T\| \leq \|T^*\|$. □

Proposition 1.2.2. *Soient $T, S \in \mathcal{B}(X, Y)$.*

(i) *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a $(\alpha T + \beta S)^* = \alpha T^* + \beta S^*$.*

(ii) *Si Z est un espace de Banach et $R \in \mathcal{B}(Y, Z)$, alors $(RT)^* = T^* R^*$.*

(iii) *Si T est inversible alors T^* l'est aussi et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

(iv) *L'opérateur T^{**} est une extension de T, i.e. $\mathrm{J}_{\mathrm{o}Y}^{-1} T^{**} \mathrm{J}_X = T$ où $\mathrm{J}_X : X \to X^{**}$ est l'isométrie canonique et $\mathrm{J}_{\mathrm{o}Y} : Y \to \mathrm{R}(\mathrm{J}_Y)$ est l'isomorphisme induit par J_Y.*

Preuve. Les trois premières assertions sont faciles à prouver.

(iv) Soient $J_X : X \to X^{**}$ et $J_Y : Y \to Y^{**}$ les isométries canoniques. Pour tous $x \in X$ et $f \in X^*$, on a

$$T^{**}(J_X(x))f = (J_X(x) \circ T^*)f = (T^* f)x = f(Tx) = J_Y(Tx)f.$$

D'où, $T^{**}J_X = J_Y T$, et par suite $J_{oY}^{-1} T^{**} J_X = T$. □

Exemple 1.2.3. Soient $f \in X^*$ et $z \in X$ non nuls. Considérons l'application linéaire $T : X \to X$ définie par $Tx = f(x)z$ pour tout $x \in X$. Alors T est un opérateur borné de norme $\|T\| = \|f\|\|z\|$, et on note simplement $T = z \otimes f$. De plus, on a $T^* = f \otimes J_z$ où $J : X \to X^{**}$ est l'injection canonique

1.3 Relations d'orthogonalité

Soient M et L des sous-ensembles de X et X^* respectivement. On défini l'*orthogonal* $M^\perp$ de M et l'orthogonal ${}^\perp L$ de L par

$$M^\perp = \{f \in X^* : f(x) = 0 \ \forall x \in M\}. \quad \text{et} \quad {}^\perp L = \{x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in L\}.$$

Pour toute application linéaire T, on note par $N(T)$ son noyau. Remarquons que

$$M^\perp = \bigcap_{x \in M} N(\varphi_x) \quad \text{et} \quad {}^\perp L = \bigcap_{f \in L} N(f),$$

où $\varphi_x : f \in X^* \mapsto f(x)$ est une forme linéaire continue pour la topologie $*$-faible $\sigma(X^*, X)$. En particulier, $M^\perp$ et ${}^\perp L$ sont des sous-espaces fermés.

Pour tout sous-ensemble $A \subset X$, on note par $\mathrm{Vect}(A)$ le sous-espace engendré par A.

Proposition 1.3.1. *Soient M et L des sous-ensembles de X et X^* respectivement. Alors*

$$^\perp(M^\perp) = \overline{\mathrm{Vect}(M)} \quad \textit{et} \quad ({}^\perp L)^\perp = \overline{\mathrm{Vect}(L)}^{\sigma(X^*,X)}.$$

Preuve. Montrons que ${}^\perp(M^\perp) = \overline{\mathrm{Vect}(M)}$. On a

$$^\perp(M^\perp) = \bigcap_{f \in M^\perp} N(f) = \bigcap_{f \in X^*,\, M \subseteq N(f)} N(f),$$

et donc $\overline{\mathrm{Vect}(M)} \subseteq {}^\perp(M^\perp)$. Soit $x \in {}^\perp(M^\perp)$, si $x \notin \overline{\mathrm{Vect}(M)}$ alors il existe $\varphi \in X^*$ tel que $\varphi(x) \neq 0$ et $\varphi(y) = 0$ pour tout $y \in \overline{\mathrm{Vect}(M)}$. En particulier, on a $\varphi \in M^\perp$. Or $x \in {}^\perp(M^\perp)$, donc $\varphi(x) = 0$ ce qui est absurde.

Reste à montrer que $({}^{\perp}L)^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}(L)}^{\sigma(X^*,X)}$. On a

$$({}^{\perp}L)^{\perp} = \bigcap_{x\in {}^{\perp}L} \mathrm{N}(\varphi_x) = \bigcap_{x\in X,\, L\subseteq \mathrm{N}(\varphi_x)} \mathrm{N}(\varphi_x),$$

et par suite $\overline{\mathrm{Vect}(L)}^{\sigma(X^*,X)} \subseteq ({}^{\perp}L)^{\perp}$. Soit $\phi \in ({}^{\perp}L)^{\perp}$, si $\phi \notin \overline{\mathrm{Vect}(L)}^{\sigma(X^*,X)}$, alors il existe une forme linéaire g continue sur $(X^*, \sigma(X^*, X))$ telle que $g(\phi) \neq 0$ et $g(\psi) = 0$ pour tout $\psi \in \overline{\mathrm{Vect}(L)}^{\sigma(X^*,X)}$. En particulier, on trouve que $L \subseteq \mathrm{N}(g)$. D'autre part, il existe $u \in X$ tel que $g = \varphi_u$, et donc $g(\phi) = \phi(u) = 0$, une contradiction. □

Remarque 1.3.2. Soient M_1 et M_2 deux sous-espaces de X, et L_1, L_2 deux sous-espaces de X^*. On a

(i) $(M_1 + M_2)^{\perp} = M_1^{\perp} \cap M_2^{\perp}$ et ${}^{\perp}(L_1 + L_2) = {}^{\perp}L_1 \cap {}^{\perp}L_2$.

(ii) Si $M_1 \subseteq M_2$ alors $M_2^{\perp} \subseteq M_1^{\perp}$; et si $L_1 \subseteq L_2$ alors ${}^{\perp}L_2 \subseteq {}^{\perp}L_1$.

Soient M un sous-espace fermé de X et $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. On note par $T_{|M}$ la restriction de T à M ; c'est un opérateur borné de M dans Y et $\|T_{|M}\| \leq \|T\|$. Lorsque $T \in \mathcal{B}(X)$ et $TM \subseteq M$, on dit que M est *T-invariant* ; dans ce cas $T_{|M} \in \mathcal{B}(M)$.

Proposition 1.3.3. *Soit M un sous-espace fermé de X, alors*

$$\dim M = \operatorname{codim} M^{\perp} \quad \textit{et} \quad \dim M^{\perp} = \operatorname{codim} M.$$

Preuve. L'opérateur $\Phi : X^* \to M^*$ défini par $\Phi(f) = f_{|M}$ est clairement borné et surjectif par le théorème de Hahn-Banach. De plus, on a $\mathrm{N}(\Phi) = M^{\perp}$. D'où $X^*/M^{\perp} \simeq M^*$, et donc

$$\dim M = \dim M^* = \operatorname{codim} M^{\perp}.$$

Considérons l'opérateur $\Psi : (X/M)^* \to M^{\perp}$ donné par $\Psi(f) = f \circ \pi$ où $\pi : X \to X/M$ est la surjection canonique. Clairement, Ψ est un opérateur borné et injectif. De plus, Ψ est surjectif par le diagramme de factorisation. D'où $(X/M)^* \simeq M^{\perp}$ et $\dim M^{\perp} = \operatorname{codim} M$. □

Pour toute application linéaire T, on note par $\mathrm{R}(T)$ son image.

Proposition 1.3.4. *Soit $T : X \to Y$ un opérateur borné. Alors*

(i) $\mathrm{N}(T^*) = \mathrm{R}(T)^{\perp}$ *et* ${}^{\perp}\mathrm{N}(T^*) = \overline{\mathrm{R}(T)}$.

(ii) $\mathrm{N}(T) = {}^{\perp}\mathrm{R}(T^*)$ *et* $\mathrm{N}(T)^{\perp} = \overline{\mathrm{R}(T^*)}^{\sigma(X^*,X)}$.

Preuve. (i) Soit $g \in Y^*$, alors

$$g \in \mathrm{N}(T^*) \quad \Leftrightarrow \quad T^*(g) = g \circ T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{R}(T) \subseteq \mathrm{N}(g) \quad \Leftrightarrow \quad g \in \mathrm{R}(T)^{\perp}.$$

(ii) Soit $x \in X$, on a

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{N}(T) &\Leftrightarrow Tx = 0 \\ &\Leftrightarrow f(Tx) = T^*(f)x = 0 \text{ pour tout } f \in Y^* \\ &\Leftrightarrow x \in {}^{\perp}\mathrm{R}(T^*). \end{aligned}$$

□

1.4 Opérateurs bornés à image fermée

Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Si l'image $\mathrm{R}(T)$ est fermée, alors l'opérateur T induit un isomorphisme $\tilde{T} : X/\mathrm{N}(T) \to \mathrm{R}(T)$ par la formule $\tilde{T}(x + \mathrm{N}(T)) = Tx$.

Proposition 1.4.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, s'il existe un sous-espace fermé M de Y tel que $\mathrm{R}(T)+M$ et $\mathrm{R}(T) \cap M$ soient fermés alors $\mathrm{R}(T)$ est fermé.*

Preuve. Posons $Z = \mathrm{R}(T) + M$ et $W = \mathrm{R}(T) \cap M$. Alors, M/W, $X/T^{-1}W$ et Z/W sont des espaces de Banach, et l'opérateur $\Phi : M/W \times X/T^{-1}W \to Z/W$ défini par

$$\Phi(m + W, x + T^{-1}W) = m + Tx + W$$

est bijectif. D'autre part, on a

$$\|m + Tx + W\| = \inf_{u \in W} \|m + Tx - u\| \leq \|m + Tx - y - Tz\| \quad \forall y \in W, z \in T^{-1}W.$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \|m + Tx + W\| &\leq \inf_{y \in W} \|m - y\| + \inf_{z \in T^{-1}W} \|T\|\|x - z\| \\ &\leq \|m + W\| + \|T\|\|x + T^{-1}W\| \\ &\leq \max(1, \|T\|)(\|m + W\| + \|x + T^{-1}W\|). \end{aligned}$$

D'où Φ est borné, et donc c'est un isomorphisme. On en déduit que

$$\Phi(\{0\} \times X/T^{-1}W) = (\mathrm{R}(T) + W)/W = \mathrm{R}(T)/W$$

est fermé, par suite $\mathrm{R}(T)$ est fermé aussi. □

Corollaire 1.4.2. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$.*

(i) *S'il existe un sous-espace de dimension finie M tel que $\mathrm{R}(T) + M$ soit fermé, alors $\mathrm{R}(T)$ est fermé.*

(ii) *S'il existe un sous-espace fermé de codimension finie G tel que TG soit fermé, alors $\mathrm{R}(T)$ est fermé.*

Preuve. (i) Comme M et $\mathrm{R}(T) \cap M$ sont de dimension finie, ils sont fermés, et le résultat découle de la proposition précédente.

(ii) Écrivons $X = G \oplus L$ où L est un sous-espace fermé de dimension finie. On a donc $\mathrm{R}(T) = TG + TL$ est fermé comme somme d'un sous-espace fermé et un autre de dimension finie. □

Théorème 1.4.3 (Théorème de l'image fermée)**.** *Soit $T : X \to Y$ un opérateur borné. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{R}(T)$ *est fermée,*

(ii) $\mathrm{R}(T^*)$ *est* $\sigma(X^*, X)$*-fermée,*

(iii) $\mathrm{R}(T^*)$ *est fermée.*

Preuve. (i) ⇒ (ii). Comme $\mathrm{N}(T)^\perp = \overline{\mathrm{R}(T^*)}^{\sigma(X^*,X)}$, il suffit de montrer que $\mathrm{N}(T)^\perp \subseteq \mathrm{R}(T^*)$. Soit $f \in \mathrm{N}(T)^\perp$ et notons par $\tilde{f} : X/\mathrm{N}(T) \to \mathbb{C}$ et $\tilde{T} : X/\mathrm{N}(T) \to \mathrm{R}(T)$ les applications induites respectivement par f et T. Comme $\mathrm{R}(T)$ est fermé, $\tilde{T}$ est un isomorphisme. En prolongeant la forme linéaire bornée $\tilde{f} \circ \tilde{T}^{-1} : \mathrm{R}(T) \to \mathbb{C}$ à une forme linéaire $g \in X^*$ on trouve que $\tilde{f} = g_{|\mathrm{R}(T)} \circ \tilde{T}$, et donc $f = g \circ T = T^*(g)$. D'où, $f \in \mathrm{R}(T^*)$.

(ii) ⇒ (iii) est clair.

(iii) ⇒ (i). Posons $T_\circ : X \to \overline{\mathrm{R}(T)}$ l'opérateur induit par T. C'est un opérateur borné et à image dense. Par prolongement et restriction des formes linéaires, il est facile de vérifier que $\mathrm{R}(T_\circ^*) = \mathrm{R}(T^*)$. Ainsi, sans perte de généralité, on peut supposer que T est à image dense.

Comme $\mathrm{N}(T^*) = \mathrm{R}(T)^\perp = \overline{\mathrm{R}(T)}^\perp = \{0\}$ et $\mathrm{R}(T^*)$ est fermée, alors T^* induit un isomorphisme $T_\circ^* : Y^* \to \mathrm{R}(T^*)$. Pour $c = \|{T_\circ^*}^{-1}\|^{-1}$, on a

$$\|T^* f\| \geq c\|f\| \quad \text{pour tout } f \in X^*.$$

Il est clair qu'il suffit d'établir que T est surjectif, ou encore par le Théorème de l'application ouverte, que $0 \in \overset{\circ}{\overline{T\mathrm{B}_X}}$. Soit $y \in Y \setminus \overline{T\mathrm{B}_X}$. Comme $\overline{T\mathrm{B}_X}$ est un convexe fermé, le théorème de Hahn-Banach (forme géométrique) assure l'existence de $\varphi \in Y^*$ vérifiant

$$\sup_{x \in \mathrm{B}_X} \mathrm{Re}\varphi(Tx) < \mathrm{Re}\varphi(y) \leq |\varphi(y)|.$$

D'autre part, on a

$$\sup_{x \in \mathrm{B}_X} \mathrm{Re}\varphi(Tx) = \sup_{x \in \mathrm{B}_X \setminus \mathrm{N}(\varphi T)} \mathrm{Re}\varphi T\left(\frac{|\varphi(Tx)|}{\varphi(Tx)} x\right) = \sup_{x \in \mathrm{B}_X} |\varphi(Tx)| = \|\varphi T\|.$$

Il vient donc

$$c\|\varphi\| \leq \|\varphi T\| < |\varphi(y)| \leq \|\varphi\|\|y\|,$$

et par suite $c \leq \|y\|$. D'où, $\mathrm{B}_Y(0, c) \subseteq \overline{T\mathrm{B}_X}$. □

Le corollaire suivant découle du théorème précédent.

Corollaire 1.4.4. *Soit $T : X \to Y$ un opérateur borné. Alors*

(i) *T est injectif à image fermée si, et seulement si, T^* est surjectif.*

(ii) *T est surjectif si, et seulement si, T^* est injectif à image fermée.*

(iii) *T est bijectif si, et seulement si, T^* est bijectif.*

Preuve. (i) Supposons T injectif à image fermée. Alors T^* est à image $\sigma(X^*, X)$-fermée et

$$X^* = \{0\}^\perp = \mathrm{N}(T)^\perp = \overline{\mathrm{R}(T^*)}^{\sigma(X^*,X)} = \mathrm{R}(T^*).$$

D'où T^* est surjectif. Réciproquement, si T^* est surjectif, alors $\mathrm{R}(T)$ est fermée et

$$\mathrm{N}(T) = {}^\perp\mathrm{R}(T^*) = {}^\perp X^* = \{0\}.$$

(ii) est similaire à (i).
(iii) résulte immédiatement de (i) et (ii). □

Proposition 1.4.5. *Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est injectif à image fermée ;*

(ii) *Il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in X$.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Alors T induit un isomorphisme $T_o : X \to \mathrm{R}(T)$. Donc, en prenant $c = \|T_o{}^{-1}\|^{-1}$, on trouve l'inégalité voulue.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Clairement, T est injectif. Soit $(Tx_n)_n$ une suite dans $\mathrm{R}(T)$ convergeant vers un élément $y \in Y$. En particulier, $(Tx_n)_n$ est de Cauchy, et donc $(x_n)_n$ l'est aussi vu que $\|x_n\| \leq c^{-1}\|Tx_n\|$. Il vient que $(x_n)_n$ converge vers un élément $x \in X$, et par suite $(Tx_n)_n$ converge vers Tx. Cela implique que $y = Tx$, et par conséquent $\mathrm{R}(T)$ est fermée. □

1.5 Spectre d'un opérateur borné

L'identité de l'algèbre de Banach $\mathcal{B}(X)$ sera notée I_X, ou tout simplement I ou 1 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, et pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ on note $\alpha I = \alpha$. Notons aussi que $\|I\| = 1$ et $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ pour tous $T \in \mathcal{B}(X)$ et $n \geq 0$.

Définition 1.5.1. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. On dit que T est *inversible* s'il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $TS = ST = I$. Dans ce cas, l'opérateur S est unique et on le note par T^{-1}.

On note par $\mathrm{Inv}(X)$ l'ensemble de tous les opérateurs inversibles dans $\mathcal{B}(X)$.

Exemple 1.5.2. Soit $A \in \mathrm{Inv}(X)$ et considérons les deux opérateurs bornés L_A et R_A sur $\mathcal{B}(X)$ donnés par

$$\mathrm{L}_A(T) = AT \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_A(T) = TA \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{B}(X).$$

L'opérateur L_A (resp. R_A) est appelé *multiplication à gauche* (resp. *droite*) par A.

Alors L_A et R_A sont inversibles. De plus, on a $\mathrm{L}_A^{-1} = \mathrm{L}_{A^{-1}}$ et $\mathrm{R}_A^{-1} = \mathrm{R}_{A^{-1}}$.

Définition 1.5.3. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$.

(i) L'*ensemble résolvant* de T est défini par $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ est inversible }\}$.

(ii) $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ est appelé le *spectre* de T.

(iii) Le *spectre ponctuel* de T est l'ensemble $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ n'est pas injectif }\}$ des valeurs propres de T.

Remarque 1.5.4. Soient $T \in \mathcal{B}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors on a

(i) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) \subseteq \sigma(T)$, et on l'égalité lorsque X est de dimension finie.

(ii) $\sigma(\alpha I) = \{\alpha\}$ et $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.

(iii) $\sigma(T + \alpha I) = \sigma(T) + \alpha$ et $\sigma(\alpha T) = \alpha\sigma(T)$.

Exemple 1.5.5. 1. Soit $T = z \otimes f$ un opérateur de rang 1 où $z \in X$ et $f \in X^*$. Il est facile de vérifier que $\mathrm{R}(T) = \mathrm{Vect}\{z\}$ (d'où l'appellation de T) et $\mathrm{N}(T) = \mathrm{N}(f)$. Alors, on a $\sigma(T) = \{0, f(z)\}$. En effet, $0 \in \sigma(T)$ car T est de rang 1, et comme $(T - f(z))z = 0$ alors $f(z) \in \sigma(T)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Notons que si $\lambda \neq 0$, alors $\mathrm{N}(T - \lambda) \subseteq \mathrm{Vect}\{z\}$; et si de plus $\lambda \neq f(z)$, alors $T - \lambda$ est injectif. Dans ce cas, $T - \lambda$ est surjectif car pour tout $y \in X$ il existe $x = \frac{-1}{\lambda}(y - \frac{f(y)}{f(z)-\lambda}z)$ tel que $(T - \lambda)x = y$. D'où, $T - \lambda$ est bijectif dès que $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq f(z)$.

2. Soit $S \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur nilpotent d'indice de nilpotence $n \geq 2$, i.e. $S^n = 0$ et $S^{n-1} \neq 0$. Alors $\sigma(S) = \{0\}$. En effet, $0 \in \sigma(S)$ car S n'est pas inversible du fait que $S^n = 0$. Pour tout $\lambda \in C$ non nul, on a

$$0 = S^n = (S - \lambda + \lambda)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^{n-k}(S - \lambda)^k = \lambda^n + (S - \lambda)\sum_{k=1}^{n} C_n^k \lambda^{n-k}(S - \lambda)^{k-1},$$

et donc $S - \lambda$ est inversible et $(S - \lambda)^{-1} = -\lambda^{-n}\sum_{k=1}^{n} C_n^k \lambda^{n-k}(S - \lambda)^{k-1}$.

Proposition 1.5.6. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur tel que $\|T\| < 1$. Alors $I - T$ est inversible. En plus, on a*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \quad et \quad \|(I - T)^{-1}\| \leq 1/(1 - \|T\|).$$

Preuve. On a $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, par suite $\sum T^k$ est une série absolument convergente dans l'espace de Banach $\mathcal{B}(X)$. De plus, on a

$$(I - T)\sum_{k=0}^{\infty} T^k = (I - T)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} T^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(I - T)T^k = \lim_{n\to\infty} I - T^{n+1} = I.$$

De même, on obtient $\left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right)(I - T) = I$. D'où, $(I - T)$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{n} T^k$.

Par majoration on obtient :

$$\|(I - T)^{-1}\| = \|\sum_{k=0}^{\infty} T^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\|T\|^k = 1/(1 - \|T\|).$$

□

Corollaire 1.5.7. *L'ensemble* $\mathrm{Inv}(X)$ *des opérateurs inversibles de* $\mathcal{B}(X)$ *est un ouvert.*

Preuve. Soit $T \in \mathrm{Inv}(X)$. Pour tout $S \in \mathcal{B}(X)$, on a

$$T + S = (I + ST^{-1})T \quad \text{et} \quad \|ST^{-1}\| \leq \|S\|\|T^{-1}\|.$$

D'après la proposition précédente, $I + ST^{-1}$ est inversible dès que $\|ST^{-1}\| < 1$. Donc, il suffit de choisir $c = 1/\|T^{-1}\|$ pour avoir $T + S$ inversible pour tout $S \in \mathcal{B}(X)$ vérifiant $\|S\| < c$. □

On note par $\mathrm{D}(z, r)$ le disque ouvert de $\mathbb{C}$ de centre z et de rayon r. Le corollaire suivant découlent immédiatement du corolaire précédent.

Corollaire 1.5.8. *Soit* $T \in \mathcal{B}(X)$. *Alors* $\rho(T)$ *est un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* $\sigma(T) \subseteq \overline{\mathrm{D}(0, \|T\|)}$. *En particulier,* $\sigma(T)$ *est un compact.*

1.6 Résolvante d'un opérateur

Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. On appelle *résolvante* de T, l'application $\mathrm{R}_T : \rho(T) \to \mathcal{B}(X)$ définie par $\mathrm{R}_T(\lambda) = (T - \lambda)^{-1}$. Elle vérifie l'*identité de la résolvante* :

$$\mathrm{R}_T(\alpha) - \mathrm{R}_T(\beta) = (\alpha - \beta)\mathrm{R}_T(\alpha)\mathrm{R}_T(\beta) \quad \text{pour tous } \alpha, \beta \in \rho(T).$$

Il découle de cette identité que R_T est holomorphe sur $\rho(T)$ et que $\mathrm{R}'_T(\lambda) = \mathrm{R}_T(\lambda)^2$.

Théorème 1.6.1. *Soit T un opérateur borné sur X. Alors*

(i) $\mathrm{R}_T(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n$ *pour tout* $|\lambda| > \|T\|$.

(ii) $\|\mathrm{R}_T(\lambda)\| \leq 1/(|\lambda| - \|T\|)$ *pour tout* $|\lambda| > \|T\|$.

(iii) $\lim_{|\lambda| \to \infty} \mathrm{R}_T(\lambda) = 0$.

Preuve. (i) Soit $\|\lambda\| > \|T\|$, alors $\|\lambda^{-1}T\| < 1$ et donc $I - \lambda^{-1}T$ est inversible et $(I - \lambda^{-1}T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} T^n$. D'où

$$\mathrm{R}_T(\lambda) = (T - \lambda)^{-1} = -\lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}T)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n.$$

(ii) Pour $\|\lambda\| > \|T\|$, on a

$$\mathrm{R_T}(\lambda) = \|\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \lambda^{-(\mathrm{n}+1)}\mathrm{T^n}\| \leq \|\lambda\|^{-1}\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\left(\|\lambda\|^{-1}\|\mathrm{T}\|\right)^{\mathrm{n}} = 1/(|\lambda| - \|\mathrm{T}\|).$$

(iii) Découle immédiatement de (ii) par passage à la limite. □

Corollaire 1.6.2. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, alors $\sigma(T)$ n'est pas vide.*

Preuve. Si $\sigma(T) = \emptyset$, il vient alors que la résolvante R_T est une fonction analytique sur tout $\mathbb{C}$, et comme $\lim_{|\lambda|\to\infty} \mathrm{R}_T(\lambda) = 0$, alors d'après le théorème de Liouville, la résolvante R_T est identiquement nulle, ce qui est absurde puisque $\mathrm{R}_T(\lambda) = (T-\lambda)^{-1}$ est inversible dans $\mathcal{B}(X)$. □

Exemple 1.6.3. Considérons l'opérateur shift unilatéral à gauche $S_g : l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$. Alors $\sigma(S_g) = \overline{\mathrm{D}(0,1)}$. En effet, on a $\|S_g\| = 1$, et donc $\sigma(S_g) \subseteq \overline{\mathrm{D}(0,1)}$. Soit $\lambda \in \mathrm{D}(0,1)$ non nul. Comme $x = (\lambda^n)_n \in l_2(\mathbb{C})$ et $S_g(x) = \lambda x$, il vient que $\lambda \in \sigma(S_g)$.

Proposition 1.6.4. *Soient $T \in \mathcal{B}(X)$ et X_1, X_2 deux sous-espaces fermés T-invariants tels que $X = X_1 \oplus X_2$. Alors $\sigma(T) = \sigma(T_{|X_1}) \cup \sigma(T_{|X_2})$.*

Preuve. Notons $T_i = T_{|X_i}$ pour $i \in \{1,2\}$. Il est facile de vérifier que $\mathrm{N}(T) = \mathrm{N}(T_1) \oplus \mathrm{N}(T_2)$ et $\mathrm{R}(T_i) = X_i \cap \mathrm{R}(T)$. Il en résulte alors que

$$\begin{aligned}
0 \notin \sigma(T) &\Leftrightarrow T \text{ est inversible}\\
&\Leftrightarrow \mathrm{N}(T) = \{0\} \text{ et } \mathrm{R}(T) = X\\
&\Leftrightarrow \mathrm{N}(T_i) = \{0\} \text{ et } \mathrm{R}(T_i) = X_i \text{ pour tout } i \in \{1,2\}\\
&\Leftrightarrow T_1 \text{ et } T_2 \text{ sont inversibles}\\
&\Leftrightarrow 0 \notin \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)
\end{aligned}$$

D'où le résultat par translation. □

Exemple 1.6.5. Soit $P \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur idempotent, i.e. $P^2 = P$. Clairement, si $P = 0$ (resp. $P = I$) alors $\sigma(P) = \{0\}$ (resp. $\sigma(P) = \{1\}$). Supposons que $P \neq 0$ et $P \neq I$. Alors dans ce cas, on a $\sigma(P) = \{0,1\}$. En effet, comme $P(P-I) = 0$, alors $X = \mathrm{N}(P) \oplus \mathrm{N}(I-P)$ où la somme directe est topologique. De plus, $\mathrm{N}(P)$ et $\mathrm{N}(I-P)$ sont deux sous-espaces P-invariants. Il vient par la proposition précédente que

$$\sigma(P) = \sigma(P_{|\mathrm{N}(P)}) \cup \sigma(P_{|\mathrm{N}(I-P)}) = \sigma(0) \cup \sigma(I) = \{0,1\}.$$

1.7 Spectre à gauche et spectre à droite

Définition 1.7.1. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. On dit que T est *inversible à gauche* (resp. *droite*) s'il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $ST = I$ (resp. $TS = I$).

On note par $\mathrm{Inv}_\ell(X)$ (resp. $\mathrm{Inv}_\mathrm{r}(X)$) l'ensemble de tous les opérateurs inversibles à gauche (resp. droite) dans $\mathcal{B}(X)$. Le *spectre à gauche* $\sigma_\ell(T)$ et le *spectre à droite* $\sigma_\mathrm{r}(T)$ d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ sont définis par

$$\sigma_\ell(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \notin \mathrm{Inv}_\ell(X)\} \quad \text{et} \quad \sigma_\mathrm{r}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \notin \mathrm{Inv}_\mathrm{r}(X)\}.$$

Remarque 1.7.2. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, on a

(i) $\mathrm{Inv}(X) = \mathrm{Inv}_\ell(X) \cap \mathrm{Inv}_\mathrm{r}(X)$.

(ii) $\sigma(T) = \sigma_\ell(T) \cup \sigma_\mathrm{r}(T)$. En particulier, $\sigma_\ell(T)$ et $\sigma_\mathrm{r}(T)$ sont bornés dans $\mathbb{C}$.

(iii) Si $T \in \mathrm{Inv}_\ell(X)$ (resp. $\mathrm{Inv}_\mathrm{r}(X)$), alors $T^* \in \mathrm{Inv}_\mathrm{r}(X^*)$ (resp. $\mathrm{Inv}_\ell(X^*)$).

Proposition 1.7.3. *Les ensembles* $\mathrm{Inv}_\ell(X)$ *et* $\mathrm{Inv}_\mathrm{r}(X)$ *sont des ouverts de* $\mathcal{B}(X)$.

Preuve. Soit $T \in \mathrm{Inv}_\ell(X)$, alors il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $ST = I$. Soit $A \in \mathcal{B}(X)$ tel que $\|A - T\| < 1/\|S\|$. Il vient que

$$\|SA - I\| = \|SA - ST\| = \|S(A - T)\| \leq \|S\|\|A - T\| < 1,$$

et donc SA est inversible. Cela implique que $A \in \mathrm{Inv}_\ell(X)$. D'où $\mathrm{Inv}_\ell(X)$ est ouvert. De même, on obtient que $\mathrm{Inv}_\mathrm{r}(X)$ est ouvert. □

Le corollaire suivant découlent immédiatement de la proposition précédente.

Corollaire 1.7.4. *Soit* $T \in \mathcal{B}(X)$, *alors* $\sigma_\ell(T)$ *et* $\sigma_\mathrm{r}(T)$ *sont des compacts de* $\mathbb{C}$.

Proposition 1.7.5. *Soit* $T \in \mathcal{B}(X)$. *On a* $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_\ell(T) \cap \sigma_\mathrm{r}(T)$. *En particulier,* $\sigma_\ell(T)$ *et* $\sigma_\mathrm{r}(T)$ *sont des compacts non vides.*

Preuve. Soit $\lambda \in \partial\sigma(T) = \sigma(T) \cap \overline{\rho(T)}$, alors il existe une suite $(\lambda_n)_n \subseteq \rho(T)$ qui converge vers λ. Posons $c_n = \|(T-\lambda_n)^{-1}\|$. Si $\lambda \notin \sigma_\ell(T)$, alors il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $S(T-\lambda) = I$. Il vient donc

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{c_n}\|S(T-\lambda)(T-\lambda_n)^{-1}\| \\ &= \frac{1}{c_n}\|S(T-\lambda_n+\lambda_n-\lambda)(T-\lambda_n)^{-1}\| \\ &\leq \frac{1}{c_n}\left(\|S\| + \|(\lambda_n-\lambda)S(T-\lambda_n)^{-1}\|\right) \\ &\leq \frac{1}{c_n}\|S\| + |\lambda_n-\lambda|\|S\|. \end{aligned}$$

Or, $(T-\lambda)(T-\lambda_n)^{-1}$ n'est pas inversible puisque $\lambda \in \sigma(T)$, et par conséquent

$$1 \leq \|1-(T-\lambda)(T-\lambda_n)^{-1}\| = |\lambda_n-\lambda|\|(T-\lambda_n)^{-1}\| = |\lambda_n-\lambda|c_n.$$

D'où, $1 \leq 2\|S\||\lambda_n-\lambda|$. Par passage à la limite, on trouve $1 \leq 0$ ce qui est absurde. De même, on obtient que $\lambda \in \sigma_{\mathrm{r}}(T)$. □

Théorème 1.7.6. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est inversible à gauche ;*

(ii) *T est injectif à image fermée et $\mathrm{R}(T)$ admet un supplémentaire topologique.*

Preuve. (i) ⇒ (ii). Soit $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $ST = I$. Il en résulte que T est injectif et $(TS)^2 = TS$, et donc TS est un idempotent. Il s'en suit que $X = \mathrm{N}(TS) \oplus \mathrm{N}(1-TS)$ et $\mathrm{R}(TS) = \mathrm{N}(1-TS)$. Comme

$$\mathrm{R}(T) = \mathrm{R}(TST) \subseteq \mathrm{R}(TS) \subseteq \mathrm{R}(T),$$

alors $\mathrm{R}(T) = \mathrm{R}(TS)$ qui est fermé et admet un supplémentaire topologique.

(ii) ⇒ (i). Clairement, T induit un isomorphisme $T_{\mathrm{o}} : X \to \mathrm{R}(T)$. Soit $P : X \to \mathrm{R}(T)$ une projection et posons $S = T_{\mathrm{o}}^{-1}P$. Il vient que $ST = I$ □

Théorème 1.7.7. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est inversible à droite ;*

(ii) *T est surjectif et $\mathrm{N}(T)$ admet un supplémentaire topologique.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $TS = I$. Il en découle que T est surjectif et $(ST)^2 = ST$. Par suite, TS est un idempotent, et donc $X = \mathrm{N}(ST) \oplus \mathrm{N}(1 - ST)$. Comme

$$\mathrm{N}(T) \subseteq \mathrm{N}(ST) \subseteq \mathrm{N}(TST) \subseteq \mathrm{N}(T),$$

alors $\mathrm{N}(T) = \mathrm{R}(ST)$ qui admet un supplémentaire topologique.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Considérons une décomposition topologique $X = \mathrm{N}(T) \oplus M$. Alors l'opérateur $T_1 : M \to X$ induit par T est un isomorphisme. En considérant l'injection canonique $J : M \to X$ et l'opérateur $S = JT_1^{-1}$, on trouve que $TS = I$. □

Proposition 1.7.8. *Soient $T \in \mathcal{B}(X)$ et X_1, X_2 deux sous-espaces fermés T-invariants tels que $X = X_1 \oplus X_2$. Alors*

$$\sigma_\ell(T) = \sigma_\ell(T_{|X_1}) \cup \sigma_\ell(T_{|X_2}) \quad \text{et} \quad \sigma_{\mathrm{r}}(T) = \sigma_{\mathrm{r}}(T_{|X_1}) \cup \sigma_{\mathrm{r}}(T_{|X_2})$$

Preuve. Notons $T_i = T_{|X_i}$ pour $i \in \{1, 2\}$. Clairement, il suffit d'établir que T est inversible à gauche (resp. droite) si, et seulement si, T_1 et T_2 le sont.

Supposons T inversible à gauche. Alors, T est injectif et $\mathrm{R}(T)$ admet un supplémentaire topologique. Par conséquent, T_1 et T_2 sont injectifs à image fermée. Comme $\mathrm{R}(T) = \mathrm{R}(T_1) \oplus \mathrm{R}(T_2)$, alors $\mathrm{R}(T_1)$ et $\mathrm{R}(T_2)$ admettent des supplémentaires topologiques. D'où, T_1 et T_2 sont inversibles à gauche.

Réciproquement, supposons que T_1 et T_2 sont inversibles à gauche. Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, il existe $S_i \in \mathcal{B}(X_i)$ tel que $S_i T_i = I_i$. Considérons l'opérateur $S \in \mathcal{B}(X)$ défini par $Sx = S_1 x_1 + S_2 x_2$ pour tout $x = x_1 + x_2$ suivant la décomposition $X = X_1 \oplus X_2$; on note simplement $S = S_1 \oplus S_2$. Il vient que $ST = I$.

D'une manière similaire, on établit le résultat pour l'inversibilité à droite. □

1.8 Ascente et descente

Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. L'ascente $\mathrm{a}(T)$ et la descente $\mathrm{d}(T)$ de T sont définies par

$$\mathrm{a}(T) = \min\{n \geq 0 : \mathrm{N}(T^n) = \mathrm{N}(T^{n+1})\} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(T) = \min\{n \geq 0 : \mathrm{R}(T^n) = \mathrm{R}(T^{n+1})\},$$

avec la convention $\min \emptyset = \infty$.

Notons que l'on a toujours $\mathrm{N}(T^n) \subseteq \mathrm{N}(T^{n+1})$ et $\mathrm{R}(T^{n+1}) \subseteq \mathrm{R}(T^n)$ pour tout $n \geq 0$.

Exemple 1.8.1. 1. Considérons l'opérateur shift unilatéral à droite $S_d : l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$. Alors

$$\mathrm{a}(S_d) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(S_d) = \infty.$$

En effet, S_d étant injectif, et donc $\mathrm{a}(S_d) = 0$. Comme

$$\mathrm{R}(S_d^k) = \{(\underbrace{0,\dots,0}_{k \text{ fois}}, x_0, x_1, \dots) : (x_n)_n \in l_2(\mathbb{C})\} \text{ pour tout } k \geq 1,$$

alors $\mathrm{R}(T^{n+1}) \subsetneq \mathrm{R}(T^n)$ pour tout $n \geq 0$, et donc $\mathrm{d}(S_d) = \infty$.

2. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur nilpotent d'indice de nilpotence $n \geq 2$. Alors

$$\mathrm{a}(T) = \mathrm{d}(T) = n.$$

En effet, comme $X = \mathrm{N}(T^n) = \mathrm{N}(T^{n+1})$ et $\mathrm{N}(T^{n-1}) \subsetneq X$, alors $\mathrm{a}(T) = n$. Pour la descente, on $\mathrm{R}(T^{n+1}) = \mathrm{R}(T^n) = \{0\}$ et $\mathrm{R}(T^{n-1}) \neq \{0\}$, et par conséquent $\mathrm{d}(T) = n$.

3. Soit $P \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur idempotent non trivial. Alors

$$\mathrm{a}(P) = \mathrm{d}(P) = 1.$$

En effet, par le fait que $P^2 = P$, on a $\mathrm{a}(P) \leq 1$ et $\mathrm{d}(P) \leq 1$. Mais, suivant la décomposition $X = \mathrm{N}(P) \oplus \mathrm{R}(P)$, on a $P = 0 \oplus I$, et donc $\mathrm{N}(P) \neq \{0\}$ et $\mathrm{R}(P) \neq X$ car P n'est pas trivial. D'où le résultat.

Remarque 1.8.2. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Les propriétés suivantes découlent immédiatement de la définition.

(i) $\mathrm{a}(T) = \mathrm{a}(\lambda T)$ et $\mathrm{d}(T) = \mathrm{d}(\lambda T)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul.

(ii) T est injectif (resp. surjectif) si, et seulement si, $\mathrm{a}(T) = 0$ (resp. $\mathrm{d}(T) = 0$).

(iii) T est inversible si, et seulement si, $\mathrm{a}(T) = \mathrm{d}(T) = 0$.

(iv) Si $\dim X < \infty$, alors $\mathrm{a}(T) < \infty$ et $\mathrm{d}(T) < \infty$.

Lemme 1.8.3. *Soient $T \in \mathcal{B}(X)$ et $k \geq 1$ un entier. Alors*

(i) $\mathrm{a}(T) \leq k$ *si, et seulement si,* $\mathrm{R}(T^k) \cap \mathrm{N}(T^n) = \{0\}$ *pour un certain (ou, d'une façon équivalente, pour tout)* $n \geq 1$.

(ii) $\mathrm{d}(T) \leq k$ *si, et seulement si,* $\mathrm{R}(T^n) + \mathrm{N}(T^k) = X$ *pour un certain (ou, d'une façon équivalente, pour tout)* $n \geq 1$.

Preuve. (i) Supposons que $\mathrm{a}(T) \leq k$. Soient $n \geq 1$ et $x \in \mathrm{R}(T^k) \cap \mathrm{N}(T^n)$, alors $T^n x = 0$ et $x = T^k y$ pour un certain $y \in X$. Or, $T^n x = T^{n+k} y = 0$ et $\mathrm{N}(T^{k+n}) = \mathrm{N}(T^k)$, donc $y \in \mathrm{N}(T^k)$ et $x = T^k y = 0$.

Réciproquement, si $x \in \mathrm{N}(T^{k+1})$, alors $T^k x \in \mathrm{R}(T^k) \cap \mathrm{N}(T) = \{0\}$. D'où, $x \in \mathrm{N}(T^k)$. Par conséquent, $\mathrm{N}(T^{k+1}) = \mathrm{N}(T^k)$.

(ii) Supposons que $\mathrm{d}(T) \leq k$. Soient $n \geq 1$ et $x \in X$, alors $T^k x \in \mathrm{R}(T^k) = \mathrm{R}(T^{k+n})$, et par conséquent, il existe $y \in X$ tel que $T^k x = T^{k+n} y$. Par suite, $x - T^n y \in \mathrm{N}(T^k)$, et donc $x \in \mathrm{R}(T^n) + \mathrm{N}(T^k)$. Ce qui montre que $\mathrm{R}(T^n) + \mathrm{N}(T^k) = X$.

Réciproquement, on a $\mathrm{R}(T^k) = T^k X = T^k(\mathrm{R}(T) + \mathrm{N}(T^k)) = \mathrm{R}(T^{k+1})$. □

Remarque 1.8.4. Soient $T \in \mathcal{B}(X)$ et X_1, X_2 deux sous-espaces fermés T-invariants tels que $X = X_1 \oplus X_2$. Alors

$$\mathrm{a}(T) = \max\{\mathrm{a}(T_{|X_1}), \mathrm{a}(T_{|X_2})\} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(T) = \max\{\mathrm{d}(T_{|X_1}), \mathrm{d}(T_{|X_2})\}.$$

Théorème 1.8.5. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Si T est d'ascente et de descente finies, alors* $\mathrm{a}(T) = \mathrm{d}(T) = n$ *et* $X = \mathrm{N}(T^n) \oplus \mathrm{R}(T^n)$ *où la somme directe est topologique.*

Preuve. On pose $\mathrm{a}(T) = p$, $\mathrm{d}(T) = q$ et $n = \max\{\mathrm{a}(T), \mathrm{d}(T)\}$. D'après le lemme précédent, on a $\mathrm{R}(T^n) \cap \mathrm{N}(T^n) = \{0\}$ et $X = \mathrm{R}(T^n) + \mathrm{N}(T^n)$. Donc, $\mathrm{R}(T^n)$ est fermé et $X = \mathrm{N}(T^n) \oplus \mathrm{R}(T^n) = \mathrm{N}(T^p) \oplus \mathrm{R}(T^q)$. En posant $T_1 = T_{|\mathrm{N}(T^p)}$ et $T_2 = T_{|\mathrm{R}(T^q)}$, on trouve que T_1 est nilpotent d'indice de nilpotence p et T_2 est inversible. D'où $\mathrm{a}(T_1) = \mathrm{d}(T_1) = p$ et $\mathrm{a}(T_2) = \mathrm{d}(T_2) = 0$. Par suite,

$$\mathrm{a}(T) = \max\{\mathrm{a}(T_1), \mathrm{a}(T_2)\} = p \quad \text{et} \quad q = \mathrm{d}(T) = \max\{\mathrm{d}(T_1), \mathrm{d}(T_2)\} = p.$$

D'où le résultat. □

Le corollaire suivant se déduit du théorème précédent et sa preuve.

Corollaire 1.8.6. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur non inversible, d'ascente et de descente finies. Alors, 0 est un point isolé dans $\sigma(T)$.*

Preuve. En utilisant les notations de la preuve du théorème précédent, T_2 est inversible et T_1 est nilpotent. Donc, il existe $r > 0$ tel que $T_i - \lambda$ est inversible, pour tout $i \in \{1, 2\}$, si $0 < |\lambda| < r$. D'où, $T - \lambda$ est inversible pour tout $0 < |\lambda| < r$, ce qui montre que 0 est un point isolé dans le spectre de T. □

Proposition 1.8.7. *Soient $T \in \mathcal{B}(X)$ et $n \geq 1$.*

(i) $\mathrm{a}(T^*) \leq \mathrm{d}(T)$ *et* $\mathrm{a}(T) \leq \mathrm{d}(T^*)$.

(ii) *Si* $\mathrm{a}(T^*) = n$ *et* $\mathrm{R}(T^n)$, $\mathrm{R}(T^{n+1})$ *sont fermés, alors* $\mathrm{d}(T) = n$.

(iii) *Si* $\mathrm{a}(T) = n$ *et* $\mathrm{R}(T^{*n})$, $\mathrm{R}(T^{*n+1})$ *sont fermés, alors* $\mathrm{d}(T^*) = n$.

(iv) $\mathrm{a}(T) = \mathrm{d}(T) = n$ *si, et seulement si,* $\mathrm{a}(T^*) = \mathrm{d}(T^*) = n$.

Preuve. (i) Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathrm{d}(T) < \infty$. Posons $d = \mathrm{d}(T)$, on a

$$\mathrm{N}(T^{*d+1}) = \mathrm{R}(T^{d+1})^{\perp} = \mathrm{R}(T^d)^{\perp} = \mathrm{N}(T^{*d}).$$

D'où, $\mathrm{a}(T^*) \leq \mathrm{d}(T)$. De même, on trouve $\mathrm{a}(T) \leq \mathrm{d}(T^*)$.

(ii) Comme $\mathrm{R}(T^n)$ et $\mathrm{R}(T^{n+1})$ sont fermés, on a

$$\mathrm{R}(T^{n+1}) = {}^{\perp}\mathrm{N}(T^{*n+1}) = {}^{\perp}\mathrm{N}(T^{*n}) = \mathrm{R}(T^n).$$

D'où $\mathrm{d}(T) \leq n$, et donc l'égalité par (i).

(iii) est similaire à (ii).

(iv) découle de (ii) et (iii). □

2

Opérateurs compacts

2.1 Rappels de topologie

Soit E un espace métrique. Un sous-ensemble $A \subseteq E$ est dit *précompact* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_1, \ldots, x_n \in E \text{ tels que } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}_E(x_i, \varepsilon).$$

Notons que les éléments $x_1, \cdots, x_n$ peuvent être supposés dans A.

Théorème 2.1.1. *Supposons que E est complet et $A \subseteq E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est relativement compact (i.e. $\bar{A}$ est compact) ;*

(ii) *A est précompact ;*

(iii) *De toute suite $(x_n)_n$ de A, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Lemme 2.1.2. *Si $A \subset E$ est précompact, alors $\overline{A}$ est séparable.*

Preuve. Soit $n \geq 1$, alors $A \subseteq \bigcup_{x \in A_n} \mathrm{B}_E(x, \frac{1}{n})$ où A_n est un sous-ensemble fini de A. Par suite, $D := \bigcup_{n \geq 1} A_n$ est un ensemble dénombrable. En plus, pour tout $y \in A$, on a

$$\mathrm{d}(y, D) \leq \mathrm{d}(y, A_n) \leq \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

donc $\mathrm{d}(y, D) = 0$, et par conséquent $D \subseteq A \subseteq \overline{D}$. D'où $\overline{A} = \overline{D}$. $\square$

Pour tout espace compact K, on note par $\mathcal{C}(K, E)$ l'espace des fonctions continues de K dans E muni de la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 2.1.3 (Arzela-Ascoli)**.** *Soient K un espace compact et $A \subseteq \mathcal{C}(K, E)$. Alors A est relativement compact si, et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *L'ensemble $A(x) = \{f(x) : f \in A\}$ est relativement compact dans E pour tout $x \in K$.*

(ii) *A est équicontinu, i.e. pour tous $a \in K$ et $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que*

$$\mathrm{d}(f(x), f(a)) \leq \varepsilon \quad \textit{pour tous } f \in A,\ x \in V.$$

2.2 Propriétés générales des opérateurs compacts

Définition 2.2.1. Soit $T : X \to Y$ un opérateur. On dit que T est *compact* si $T\mathrm{B}_X$ est relativement compact dans Y où B_X est la boule unité fermée de X.

On dit que T est de *rang fini* si $\dim \mathrm{R}(T) < \infty$.

Comme tout ensemble compact est borné, il découle de la définition que tout opérateur compact est nécessairement borné. On note par $\mathcal{K}(X, Y)$ (resp. $\mathcal{F}(X, Y)$) l'ensemble de tous les opérateurs compacts (resp. de rang fini) dans $\mathcal{B}(X, Y)$. Lorsque $X = Y$, on note simplement $\mathcal{K}(X, Y) = \mathcal{K}(X)$ et $\mathcal{F}(X, Y) = \mathcal{F}(X)$.

Remarque 2.2.2.
(i) L'opérateur identité I n'est pas compact. En effet, d'après le théorème de Riesz, un espace normé est de dimension finie si, et seulement si, sa boule unité fermée est compacte.

(ii) $\mathcal{F}(X, Y) \subseteq \mathcal{K}(X, Y)$ car dans un espace normé de dimension finie les compacts sont les sous-ensembles fermés bornés.

(iii) Les opérateurs de rang fini ne sont pas toujours bornés.

Théorème 2.2.3. *Soit Z un espace de Banach complexe.*

(i) *$\mathcal{K}(X, Y)$ est un sous-espace fermé dans $\mathcal{B}(X, Y)$.*

(ii) *Soient $S \in \mathcal{B}(X, Y)$ et $T \in \mathcal{B}(Y, Z)$. Si S ou T est compact, alors TS est compact. En particulier, $\mathcal{K}(X)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{B}(X)$.*

Preuve. (i) Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$ et $c \in \mathbb{C}$. On a $\overline{T_1 \mathrm{B}_X}$ et $c\overline{T_2 \mathrm{B}_X}$ sont deux compacts, et donc leur somme l'est aussi. Comme $\overline{(T_1 + cT_2)\mathrm{B}_X} \subseteq \overline{T_1 \mathrm{B}_X} + c\overline{T_2 \mathrm{B}_X}$, il vient que $T_1 + cT_2$ est un opérateur compact.

Soient $S \in \overline{\mathcal{K}(X, Y)}$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ tel que $\|S - T\| < \varepsilon/2$, et donc $S\mathrm{B}_X \subseteq T\mathrm{B}_X + \mathrm{B}_Y(0, \frac{\varepsilon}{2})$. Comme $T\mathrm{B}_X$ est précompact, il existe des vecteurs $y_i \in Y$, $1 \leq i \leq n$, tels que

$$T\mathrm{B}_X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}_Y(y_i, \frac{\varepsilon}{2}) = \{y_1, \ldots, y_n\} + \mathrm{B}_Y(0, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Par conséquent,

$$S\mathrm{B}_X \subseteq \{y_1, \ldots, y_n\} + \mathrm{B}_Y(0, \frac{\varepsilon}{2}) + \mathrm{B}_Y(0, \frac{\varepsilon}{2}) = \{y_1, \ldots, y_n\} + \mathrm{B}_Y(0, \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}_Y(y_i, \varepsilon).$$

Cela montre que $S\mathrm{B}_X$ est précompact. D'où, $S \in \mathcal{K}(X, Y)$.

(ii) Si S est compact, alors $\overline{S\mathrm{B}_X}$ est compact et $TS(\mathrm{B}_X) \subseteq T(\overline{S\mathrm{B}_X})$, et par suite $TS(\mathrm{B}_X)$ est relativement compact. D'où, $TS \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Si T est compact, on a $\overline{T\mathrm{B}_X}$ est compact et

$$TS(\mathrm{B}_X) \subseteq T\left(\|S\|\mathrm{B}_Y\right) = \|S\|T\mathrm{B}_Y \subseteq \|S\|\overline{T\mathrm{B}_Y},$$

ce qui implique que $TS(\mathrm{B}_X)$ est relativement compact, et donc TS est compact. □

Théorème 2.2.4. *Soit Z un espace de Banach complexe.*

(i) *$\mathcal{F}(X, Y)$ est un sous-espace et $\overline{\mathcal{F}(X, Y)} \subseteq \mathcal{K}(X, Y)$.*

(ii) *Soient $S \in \mathcal{B}(X, Y)$ et $T \in \mathcal{B}(Y, Z)$. Si S ou T est de rang fini, alors TS est de rang fini. En particulier, $\mathcal{F}(X)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{B}(X)$.*

Preuve. (i) Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{F}(X, Y)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $\mathrm{R}(T_1 + \lambda T_2) \subseteq \mathrm{R}(T_1) + \mathrm{R}(T_2)$, et donc $T_1 + \lambda T_2$ est de rang fini. Comme $\mathcal{K}(X, Y)$ est fermé et contient les opérateurs de rang fini, alors $\overline{\mathcal{F}(X, Y)} \subseteq \mathcal{K}(X, Y)$.

(ii) Si T est de rang fini, alors $\dim \mathrm{R}(T) < \infty$ et $\mathrm{R}(TS) \subseteq \mathrm{R}(T)$. D'où, $TS \in \mathcal{F}(X, Y)$.

Maintenant si S est de rang fini, alors $\dim \mathrm{R}(S) < \infty$ et $\mathrm{R}(TS) = T\mathrm{R}(S)$. Cela entraîne que $TS \in \mathcal{F}(X, Y)$. □

On signale que si TS est compact, ou même de rang fini, cela n'entraîne pas que T, ou S, est compact. En fait, considérons deux espaces de Banach X_1 et X_2 de dimension infinie. Posons $T = 0 \oplus I$ et $S = I \oplus 0$ sur l'espace $Z = X_1 \oplus X_2$. Alors $TS = 0$ est de rang fini, mais T et S ne sont pas compacts ; en effet, par exemple on a $\mathrm{B}_{X_2} = \overline{T\mathrm{B}_{X_2}} \subseteq \overline{T\mathrm{B}_Z}$.

Corollaire 2.2.5. *Si $(T_n)_n$ est une suite d'opérateurs de rang fini dans $\mathcal{B}(X, Y)$ telle que $T_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$, alors T est compact.*

Exemple 2.2.6. Considérons l'opérateur $T : l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$ défini par

$$Tx = \left(\frac{1}{2^n}x_n\right)_{n\geq 0} \qquad \text{pour tout } x = (x_n)_{n\geq 0} \in l_2(\mathbb{C}).$$

C'est un opérateur borné car $\|Tx\|^2 = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n}|x_n|^2 \leq \sum_{n\geq 0} |x_n|^2 = \|x\|^2$.

Pour tout $n \geq 0$, considérons l'opérateur $T_n : l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$ donné par

$$T_n x = (x_0, \ldots, \frac{1}{2^n}x_n, 0, \cdots) \qquad \text{pour tout } x = (x_n)_{n\geq 0} \in l_2(\mathbb{C}).$$

Il est clair que les opérateurs T_n sont bornés et de rang fini. Or,

$$\|(T - T_n)x\|^2 = \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{4^k}|x_k|^2 \leq \|x\|^2 \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{4^k},$$

et donc $\|T - T_n\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Ce qui montre que T est compact.

Remarque 2.2.7. Lorsque Y est un espace de Hilbert alors $\overline{\mathcal{F}(X, Y)} = \mathcal{K}(X, Y)$. En effet, soient $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ et $\varepsilon > 0$. Comme $T\mathrm{B}_X$ est précompact, il existe $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tels que $T\mathrm{B}_X \subset \cup_{i=1}^n \mathrm{B}_Y(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Notons $G = \mathrm{Vect}(y_1, \ldots, y_n)$ et P la projection orthogonale sur G. Il vient que $\|P\| = 1$ et $S = PT$ est un opérateur borné de rang fini. Soit $x \in \mathrm{B}_X$, on a $\|Tx - y_k\| < \varepsilon/2$ pour un certain $k \in \{1, \ldots, n\}$, et par suite

$$\begin{aligned}
\|Sx - Tx\| &\leq \|Sx - y_k\| + \|Tx - y_k\| = \|PTx - Py_k\| + \|Tx - y_k\| \\
&\leq \|P\|\|Tx - y_k\| + \|Tx - y_k\| = 2\|Tx - y_k\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

D'où, $\|S - T\| \leq \varepsilon$ et $T \in \overline{\mathcal{F}(X, Y)}$.

Théorème 2.2.8. *Soit $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. On a*

(i) *$T \in \mathcal{F}(X, Y)$ si, et seulement si, $\mathrm{R}(T)$ est fermé.*

(ii) $\overline{\mathrm{R}(T)}$ *est séparable.*

Preuve. (i) Évidemment, la condition est nécessaire. Supposons que $\mathrm{R}(T)$ est fermé. Alors l'opérateur $T_0 : X \to \mathrm{R}(T)$, induit par T, est surjectif, et donc d'après le théorème de l'application ouverte, il existe $c > 0$ tel que

$$\frac{c}{2}\mathrm{B}_{\mathrm{R}(T)} \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{R}(T)}(0, c) \subseteq \overline{T\mathrm{B}_X}.$$

Il vient alors que $\mathrm{B}_{\mathrm{R}(T)}$ est compact. Ce qui établit que $\mathrm{R}(T)$ est de dimension finie.

(ii) On a $\mathrm{R}(T) = \cup_{n\geq 1} nT\mathrm{B}_X$. Or, pour tout $n \geq 1$, $nT\mathrm{B}_X$ est relativement compact, donc il existe un sous-ensemble dénombrable A_n tel que $\overline{A_n} = n\overline{T\mathrm{B}_X}$. Comme toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable, alors l'ensemble $A = \cup_{n\geq 1} A_n$ est dénombrable, et en plus on a

$$A \subseteq \mathrm{R}(T) \subseteq \bigcup_{n\geq 1} \overline{A_n} \subseteq \overline{A}.$$

D'où, $\overline{\mathrm{R}(T)} = \overline{A}$, ce qui termine la preuve. □

Théorème 2.2.9 (Théorème de Shauder)**.** *Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, alors T est compact si, et seulement si, T^* est compact.*

Preuve. On suppose que T est compact. On a $K = \overline{T\mathrm{B}_X}$ est un compact de Y. Soit $(\varphi_n)_n \subseteq \mathrm{B}_{Y^*}$ et considérons la suite $g_n = \varphi_{n|K}$ de l'espace $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$. La suite $(g_n)_n$ est bornée et équiconitnue car

$$\|g_n\|_\infty = \sup_{y\in K} |g_n(y)| = \sup_{y\in T\mathrm{B}_X} |g_n(y)| = \sup_{x\in \mathrm{B}_X} |\varphi_n(Tx)| \leq \|T\|,$$

et

$$\|g_n(x) - g_n(y)\| \leq \|\varphi_n\|\|x - y\| \leq \|x - y\| \quad \text{pour tous } x, y \in K \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

Par le théorème d'Ascoli, la suite (g_n) est relativement compacte. Par suite, il existe une suite extraite (g_{n_k}) de Cauchy dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$. D'autre part,

$$\|T^*\varphi_{n_k} - T^*\varphi_{n_s}\| = \sup_{x\in \mathrm{B}_X} |(\varphi_{n_k} - \varphi_{n_s})Tx| = \sup_{y\in K} |(\varphi_{n_k} - \varphi_{n_s})y|,$$

donc $(T^*\varphi_{n_k})$ est de Cauchy dans X^*. Ce qui montre que $T^*\mathrm{B}_{Y^*}$ est relativement compact, et par suite T^* est compact.

Réciproquement, supposons que T^* est compact. Alors d'après ce qui précède T^{**} est compact. Comme T^{**} est une extension de T à X^{**}, on obtient que T est compact. □

On rappelle qu'une suite généralisée dans X est une famille $(x_i)_{i\in I}$ indexée par un ensemble filtrant I, i.e. I est ordonné et tout sous-ensemble de I à deux éléments est majoré.

On exprime la convergence d'une suite généralisée $(x_i)_{i\in I}$ dans X vers $x \in X$ par

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists i \in I,\ \forall j \in I : j \geq i \Rightarrow \|x_j - x\| < \varepsilon.$$

Il est bien connu qu'une application $F : X \to Y$ est continue en un point $a \in X$ si, et seulement si, pour toute suite généralisée $(x_i)_{i\in I}$ qui converge vers a, la suite généralisée $(F(x_i))_{i\in I}$ converge vers $F(a)$.

En conséquence, si $T : X \to Y$ est un opérateur borné, alors $T : (X, \sigma(X, X^*)) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ reste continue.

Théorème 2.2.10. *Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est compact ;*

(ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{B}_X$ tels que*

$$\min_{1\leq i\leq n} \|Tx - Tx_i\| < \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{B}_X;$$

(iii) *Pour toute suite généralisée $(x_\alpha)_\alpha \subseteq \mathrm{B}_X$ convergeant faiblement vers zéro, la suite généralisée $\|Tx_\alpha\|$ converge vers zéro ;*

(iv) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace $M \subseteq X$ fermé et de codimension finie tel que $\|T_{|M}\| \leq \varepsilon$.*

Preuve. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). On a

$$\begin{aligned}
T \text{ est compact} \quad &\Leftrightarrow \quad T\mathrm{B}_X \text{ est relativement compact}\\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{B}_X : T\mathrm{B}_X \subset \cup_{i=1}^n \mathrm{B}_Y(Tx_i, \varepsilon)\\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{B}_X : \min_{1\leq i\leq n} \|Tx - Tx_i\| < \varepsilon,\ \forall x \in \mathrm{B}_X.
\end{aligned}$$

(i) $\Rightarrow$ (iii). On a $K = \overline{T\mathrm{B}_X}$ est un compact de Y et l'application $I_K : (K, \|.\|) \to (K, \sigma(Y, Y^*)$ est une bijection continue, donc c'est un homéomorphisme. Comme $T_{|\mathrm{B}_X} : (\mathrm{B}_X, \sigma(X, X^*) \to (K, \sigma(Y, Y^*)$ est continu, alors en composant à droite par I_K^{-1}, il vient que $T_{|\mathrm{B}_X} : (\mathrm{B}_X, \sigma(X, X^*) \to (K, \|.\|)$ est continu. D'où le résultat.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Supposons que l'assertion (iii) n'est pas vérifiée. Alors, il existe $c > 0$ tel que pour tout sous-espace fermé de codimension finie M, il existe $x_M \in M$ satisfaisant

$\|x_M\| = 1$ et $\|Tx_M\| \geq c$. On obtient ainsi une suite généralisée indexée par une famille de sous-espaces munie de la relation d'ordre $M \geq M' \Leftrightarrow M \subseteq M'$. Si $\varphi \in X^*$, alors $M_0 = \mathrm{N}(\varphi)$ est un hyperplan de X, et pour tout $M \geq M_0$, on a $\varphi(x_M) = 0$. Ce qui implique que (x_M) converge faiblement vers zéro. Cependant, $\|Tx_M\| \nrightarrow 0$, une contradiction.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Si T n'est pas compact, il existe alors $c > 0$ tel que

$$T\mathrm{B}_X \nsubseteq \bigcup_{x\in\Omega} \mathrm{B}_Y(Tx, c) \quad \text{pour tout sous-ensemble fini } \Omega \subseteq \mathrm{B}_X.$$

Soit $x_1 \in \mathrm{B}_X$, il existe $x_2 \in \mathrm{B}_X$ tel que $\|Tx_1 - Tx_2\| \geq c$. Pour $\Omega = \{x_1, x_2\}$, il existe $x_3 \in \mathrm{B}_X$ tel que $\|Tx_3 - Tx_2\| \geq c$ et $\|Tx_3 - Tx_1\| \geq c$. De proche en proche, on construit une suite $(x_n) \subseteq \mathrm{B}_X$ telle que $\|Tx_i - Tx_j\| \geq c$ pour tous $i \neq j$.

Soient M un sous-espace fermé de codimension finie, $P \in \mathcal{B}(X)$ une projection sur M et $\varepsilon > 0$. Comme $R(I - P) = N(P)$ est de dimension finie, l'opérateur $I - P$ est compact. D'après (ii), il existe $y_1, \ldots, y_r \in \mathrm{B}_X$ tels que $\min_{1\leq i\leq n} \|(I - P)(x - y_i)\| < \varepsilon/2$ pour tout $x \in \mathrm{B}_X$. En particulier, pour la suite $(x_n)_n$, il existe $j, k \in \mathbb{N}$ tels que $j \neq k$, $\|(I - P)(x_j - y_s)\| \leq \varepsilon/2$ et $\|(I - P)(x_k - y_s)\| \leq \varepsilon/2$ pour un certain $1 \leq s \leq r$, et donc $\|(I - P)(x_j - x_k)\| \leq \varepsilon$. Il vient alors

$$\|P(x_j - x_k)\| \leq \|x_j - x_k\| + \|(I - P)(x_j - x_k)\| \leq 2 + \varepsilon,$$

et

$$\|TP(x_j - x_k)\| \geq \|T(x_j - x_k)\| - \|T(I - P)(x_j - x_k)\| \geq c - \varepsilon\|T\|.$$

Par conséquent,

$$\|T_{|M}\| = \sup\{\|Tu\| : u \in M, \|u\| = 1\} \geq \frac{\|TP(x_j - x_k)\|}{\|P(x_j - x_k)\|} \geq \frac{c - \varepsilon\|T\|}{2 + \varepsilon}.$$

Or, ε est arbitraire, donc $\|T_{|M}\| \geq c/2$, ce qui est une contradiction. □

Corollaire 2.2.11. *Si $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ est un opérateur compact, alors pour toute $(x_n)_n$ de X convergeant faiblement, la suite $(Tx_n)_n$ converge fortement.*

Preuve. Soit $(x_n)_n$ une suite convergeant faiblement vers $x \in X$, alors $y_n = x_n - x$ est une suite qui converge faiblement vers 0, et donc elle est bornée. En appliquant le théorème précédent sur la suite $(\frac{1}{m} y_n)_n$ où $m = \sup_n \|y_n\|$, on obtient que $(Ty_n)_n$, et donc aussi (Tx_n), converge fortement. □

La réciproque du corolaire précédent est vraie lorsque X est réflexif. En effet, dans ce cas B_X est faiblement compacte, et donc pour toute suite $(x_n) \subseteq \mathrm{B}_X$, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge faiblement. D'après les hypothèses, la suite $(Tx_{n_k})_k$ converge en norme, d'où $T\mathrm{B}_X$ est relativement compact.

Si l'espace de Banach X n'est pas réflexif, alors la réciproque tombe en défaut. En effet, pour toute suite $(x_n) \subseteq \ell_1(\mathbb{C})$, on a d'après le Lemme de Schur

$$x_n \xrightarrow{\sigma(\ell_1,\ell_\infty)} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|x_n\| \to 0.$$

Cependant, l'opérateur identité de $\ell_1(\mathbb{C})$ n'est pas compact.

Exemple 2.2.12. Considérons l'opérateur $V : L_2([0,1]) \to C([0,1])$ défini par

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \quad \text{pour tous } f \in L_2([0,1]),\ x \in [0,1].$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit $\chi_{[x,y]}.f$ on voit que :

$$|V(f)(x) - V(f)(y)| = |\int_x^y f(t)dt| \leq \|f\|_2 |x-y|^{1/2}, \tag{2.1}$$

donc V est bien défini. En plus il est borné car

$$\|V(f)\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |V(f)(x)| \leq \|f\|_2.$$

Vu l'inégalité (2.1), le théorème d'Arzela-Ascoli affirme que $VB_{L_2([0,1])}$ est relativement compact dans $C([0,1])$, donc V est compact. Comme $C([0,1])$ s'injecte dans $L_2([0,1])$, alors V est un opérateur compact de $L_2([0,1])$ dans $L_2([0,1])$.

Proposition 2.2.13. *Soient H, K deux espaces de Hilbert complexes et $T \in \mathcal{B}(H,K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est compact ;*

(ii) *Pour toute famille orthonormale $(e_n)_n$ de H, on a $\lim \|Te_n\| = 0$.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). La suite $(e_n)_n$ converge faiblement vers 0 car, pour tout $y \in H$, on a $\sum_{n\geq 0} | < e_n, y > |^2 \leq \|y\|^2$, et donc $\lim < e_n, y >= 0$. D'après le corollaire précédent, on trouve que $\lim \|Te_n\| = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Si T n'est pas compact, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|T - F\| > \varepsilon$ pour tout $F \in \mathcal{F}(H,K)$. En particulier, $\|T\| > \varepsilon$, et donc il existe $e_0 \in H$ unitaire (i.e. de norme 1) tel que $\|Te_0\| > \varepsilon$. Soit $P_0 \in \mathcal{B}(H)$ la projection orthogonale sur Vect$\{e_0\}$. Alors TP_0 est de rang fini et donc $\|T - TP_0\| > \varepsilon$. Il existe alors $u_1 \in H$ unitaire tel que

$$\|(T - TP_0)u_1\| > \varepsilon \geq \varepsilon \|(I - P_0)u_1\|.$$

En posant $e_1 = \|(I-P_0)u_1\|^{-1}(T-TP_0)u_1$, on trouve que e_1 est unitaire, orthogonal à e_0 et $\|Te_1\| > \varepsilon$. De proche en proche, on arrive à construire une famille orthonormale $(e_n)_n$ dans H telle que $\lim \|Te_n\| > 0$. □

Corollaire 2.2.14. *Un opérateur $T \in \mathcal{B}(H,K)$ est compact si, et seulement si, pour toute famille orthonormale $(e_n)_n$ de $\mathrm{N}(T)^\perp$, on a $\lim \|Te_n\| = 0$.*

Preuve. De toute évidence, la condition est nécessaire. Pour la suffisance, il suffit de remarque que l'opérateur T se décompose comme $T = T_{|\mathrm{N}(T)^\perp} \circ P$ où $P : H \to \mathrm{N}(T)^\perp$ est une projection, et d'après l'hypothèse $T_{|\mathrm{N}(T)^\perp}$ est compact. □

2.3 Théorie spectrale des opérateurs compacts

Notons que la restriction d'un opérateur compact $T \in \mathcal{B}(X)$ à un sous-espace fermé F est compact car $T_{|F}\mathrm{B}_F = T_{|F}(\mathrm{B}_X \cap F) \subseteq \overline{T\mathrm{B}_X}$.

Théorème 2.3.1. *Soit $K \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur compact. Pour tout complexe λ non nul, on a*

(i) $\mathrm{N}(K-\lambda)$ *est de dimension finie.*

(ii) $\mathrm{R}(K-\lambda)$ *est fermé et de codimension finie.*

Preuve. (i) Comme $K_{|\mathrm{N}(K-\lambda)} = \lambda$ est un opérateur compact, alors $\dim \mathrm{N}(K-\lambda)$ est finie.

(ii) Il existe un sous-espace fermé M de codimension finie tel que $\|K_{|M}\| \leq \frac{|\lambda|}{2}$. On a

$$\|(K-\lambda)x\| \geq |\lambda|\|x\| - \|Kx\| \geq \frac{|\lambda|}{2}\|x\| \quad \text{pour tout } x \in M.$$

D'où, $(K-\lambda)M$ est fermé, et donc $\mathrm{R}(K-\lambda)$ est fermé. D'autre part, comme K^* est compact, on a $\dim \mathrm{N}(K^*-\lambda)$ est finie, et par suite le sous-espace $\mathrm{R}(K-\lambda) = {}^\perp\mathrm{N}(K^*-\lambda)$ est de codimension finie. □

On note que si $K \in \mathcal{K}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors pour tout $n \geq 1$ on a

$$\dim \mathrm{N}(K-\lambda)^n < \infty \quad \text{et} \quad \operatorname{codim} \mathrm{R}(K-\lambda)^n < \infty.$$

En effet, ceci résulte du précédent théorème et du fait que

$$(K-\lambda)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-\lambda)^{n-k}K^k = (-\lambda)^n + K\sum_{k=1}^{n} C_n^k(-\lambda)^{n-k}K^{k-1},$$

qui est la somme d'un scalaire multiple de l'identité et d'un opérateur compact.

Lemme 2.3.2. *Soit M un sous-espace fermé propre de X. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $\|x\| \leq 1 + \varepsilon$ et* $\operatorname{dist}(x, M) = 1$.

Preuve. Comme X/M est un espace de Banach non réduit à zéro, alors il existe $x_0 \in X$ tel que $\|x_0 + M\| = 1$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \in M$ tel que $\|x_0 - m\| \leq 1 + \varepsilon$. En posant $x = x_0 - m$ on trouve que $\operatorname{dist}(x, M) = \|x + M\| = \|x_0 + M\| = 1$. □

Théorème 2.3.3. *Soit $K \in \mathcal{K}(X)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul, $K - \lambda$ est d'ascente et de descente finies.*

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\lambda = 1$. Supposons que $K - I$ n'est pas d'ascente finie. D'après le lemme précédent, pour tout entier $k \geq 1$, il existe $x_k \in \mathrm{N}((K - I)^k)$ tel que $\|x_k\| \leq 2$ et $\operatorname{dist}(x_k, \mathrm{N}(K - I)^{k-1}) = 1$. Soient i, j deux entiers tels que $i > j \geq 1$, on a

$$\|Kx_j - Kx_i\| = \|(K - I)x_j + x_j - (K - I)x_i - x_i\| \geq \operatorname{dist}(x_i, \mathrm{N}(K - I)^{i-1}) = 1,$$

puisque $(K - I)x_j + x_j - (K - I)x_i \in \mathrm{N}((K - I)^{i-1})$. Il vient alors que la suite $(Kx_k)_k$ ne possède aucune sous-suite extraite convergente, ce qui contredit la compacité de K.

Comme K^* est compact, alors $K^* - I$ est d'ascente finie. Or, $\mathrm{R}(K - I)^n$ est fermé pour tout entier n, d'où $K - I$ est de descente finie. □

Théorème 2.3.4. *Soient $K \in \mathcal{K}(X)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul, on a*

$$\dim \mathrm{N}(K - \lambda) = \dim \mathrm{N}(K^* - \lambda) = \operatorname{codim} \mathrm{R}(K - \lambda) = \operatorname{codim} \mathrm{R}(K^* - \lambda).$$

Preuve. On pose $T = K - \lambda$ et $p = \mathrm{a}(T) = \mathrm{d}(T)$. Écrivons $T = T_0 \oplus T_1$ relativement à la décomposition $X = \mathrm{N}(T^p) \oplus \mathrm{R}(T^p)$. Comme T_1 est inversible, alors

$$\operatorname{codim} \mathrm{R}(T) = \operatorname{codim} \mathrm{R}(T_0) = \dim \mathrm{N}(T^p)/T\mathrm{N}(T^p) = \dim \mathrm{N}(T^p) - \dim T\mathrm{N}(T^p).$$

En plus T_0 induit un opérateur bijectif de $\mathrm{N}(T^p)/\mathrm{N}(T)$ dans $T\mathrm{N}(T^p)$, et donc $\dim \mathrm{N}(T^p) - \dim T\mathrm{N}(T^p) = \dim \mathrm{N}(T)$. Ce qui montre que $\operatorname{codim} \mathrm{R}(T) = \dim \mathrm{N}(T)$.

On a aussi par dualité $\operatorname{codim} \mathrm{R}(T^*) = \dim \mathrm{N}(T^*)$. D'autre part, comme ${}^{\perp}\mathrm{R}(T^*) = \mathrm{N}(T)$, alors $\dim \mathrm{N}(T) = \operatorname{codim} \mathrm{R}(T^*)$, ce qui termine la preuve. □

Il découle, en particulier, du théorème précédent que si $K \in \mathcal{K}(X)$ et λ un complexe non nul, alors $K - \lambda$ est injectif si, et seulement si, $K - \lambda$ est surjectif.

Le théorème précédent est connu dans la littérature sous le nom de l'*Alternative de Fredholm*. En fait, l'appellation est justifiée par la version suivante de ce résultat : Si $K \in \mathcal{B}(X)$ est un opérateur compact, alors une et une seule des deux alternatives suivantes est vérifiée :

1. ou bien pour chaque $u \in X$, l'équation $(K - I)x = u$ possède une unique solution,

2. ou bien $(K^* - I)x = 0$ possède n solutions linéairement indépendantes x_i^*, $1 \leq i \leq n$, et dans ce cas, pour que l'équation $(K - I)x = u$ possède une solution, il faut et il suffit que $x_i^*(u) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Notons que $\mathrm{N}(K^* - I) = \mathrm{Vect}\{x_i^* : 1 \leq i \leq n\} = \mathrm{R}(K - I)^{\perp}$.

Corollaire 2.3.5. *Supposons que X est de dimension infinie, et soit $K \in \mathcal{K}(X)$. Alors*

$$\sigma(K) = \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(K).$$

Preuve. Si K est inversible, alors $I = KK^{-1}$ est compact ce qui n'est pas possible. D'où, $0 \in \sigma(K)$ et par suite $\{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(K) \subseteq \sigma(K)$.

Soit $\lambda \in \sigma(K)$, si $\lambda \neq 0$, alors $K - \lambda$ n'est pas injectif d'après le théorème précédent, donc $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(K)$. □

Théorème 2.3.6. *Soit $K \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur compact. Alors :*

(i) *Tout $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ est un point isolé dans $\sigma(K)$.*

(ii) *$\sigma(K)$ est au plus dénombrable. En plus, si $\sigma(K)$ est infini, alors 0 est son seul point d'accumulation.*

Preuve. (i) découle immédiatement du fait que $K - \lambda$ est d'ascente et de descente finies pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul.

(ii) Comme l'ensemble $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est discret, alors $A_n := \sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$ est compact et discret, donc fini, pour tout entier $n \geq 1$. Par suite, $\sigma(T) = \{0\} \cup (\cup_n A_n)$ est au plus dénombrable.

Supposons que $\sigma(K)$ est infini. Comme tout $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ est un point isolé dans $\sigma(T)$, alors λ ne peut pas être un point d'accumulation de $\sigma(T)$. D'autre part, comme $\sigma(T)$ est un ensemble infini et borné, alors il possède un point d'accumulation qui est égale à 0. □

Remarque 2.3.7. Pour un opérateur compact $K \in \mathcal{B}(X)$ de spectre infini, on peut réarranger les éléments de $\sigma(K) \setminus \{0\}$ en une suite décroissante en module vers 0.

3 Opérateurs bornés sur un espace de Hilbert

Dans toute la suite, H et K dénotent deux espaces de Hilbert complexes de dimension infinie.

3.1 Adjoint d'un opérateur borné

On rappelle qu'une forme sesquilinéaire φ est une application de $H \times K$ dans $\mathbb{C}$ linéaire par rapport à la première variable et antilinéaire par rapport à la deuxième variable. Dans ce cas, on dit que φ est bornée si $\sup_{x\neq 0,\, y\neq 0} \frac{|\varphi(x,y)|}{\|x\|\|y\|} < \infty$.

Théorème 3.1.1. *Soit $\varphi : H \times K \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire bornée. Alors, il existe deux opérateurs uniques $A \in \mathcal{B}(H,K)$ et $B \in \mathcal{B}(K,H)$ tels que*

$$\max\{\|A\|, \|B\|\} \leq \sup_{x\neq 0,\, y\neq 0} \frac{|\varphi(x,y)|}{\|x\|\|y\|} \quad \text{et} \quad \varphi(x,y) = \langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle \ \forall x \in H, y \in K.$$

Preuve. Soit $x \in H$. On définit une forme linéaire bornée $L_x : K \to \mathbb{C}$ par $L_x(y) = \overline{\varphi(x,y)}$. D'après le théorème de Riesz, il existe $z \in K$ unique tel que

$$L_x = \langle ., z\rangle \quad \text{et} \quad \|L_x\| = \|z\| \leq \|x\| M$$

où $M = \sup_{x\neq 0,\, y\neq 0} \frac{|\varphi(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$. Alors, on définit bien un opérateur borné $A \in \mathcal{B}(H,K)$ en posant $Ax = z$. De plus, on a

$$\langle Ax, y\rangle = \overline{\langle y, Ax\rangle} = \overline{L_x(y)} = \varphi(x,y).$$

S'il existe $C \in \mathcal{B}(H,K)$ vérifiant $\langle Ax, y\rangle = \varphi(x,y)$ pour tous $x \in H$ et $y \in K$, alors $\langle (C-A)x, y\rangle =$ pour tous $x \in H$ et $y \in K$. D'où, $C = A$. De même, on trouve B. $\square$

Soit $A \in \mathcal{B}(H, K)$. L'unique opérateur $B \in \mathcal{B}(K, H)$ vérifiant $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$, pour tous $x \in H$ et $y \in K$, est appelé l'*adjoint* de A et on le note par $B = A^*$.

Si l'on note $A' : K^* \to H^*$ l'adjoint de A dans le contexte des espaces de Banach et $\mathrm{J}_H : H^* \to H$ l'isométrie surjective antilinéaire de Riesz, alors $A^* = \mathrm{J}_H A' \mathrm{J}_K^{-1}$.

Exemple 3.1.2. 1. Soient $x, y \in H$ non nuls, et notons par $x \otimes y$ l'opérateur borné de rang 1 donné par $(x \otimes y)u = \langle u, y\rangle x$ pour tout $u \in H$. Alors, $(x \otimes y)^* = y \otimes x$. En effet, pour tous $v, w \in H$, on a

$$\langle (x\otimes y)^* v, w\rangle = \langle v, (x\otimes y)w\rangle = \langle v, \langle w, y\rangle x\rangle = \langle y, w\rangle\langle v, x\rangle = \langle\langle v, x\rangle y, w\rangle = \langle (y\otimes x)v, w\rangle.$$

2. Soient $\Omega = (e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H et $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I}$ une famille bornée de nombres complexes. L'adjoint de l'opérateur diagonal $D \in \mathcal{B}(H)$ associé à la famille α est un opérateur diagonal associé à la base Ω et à la famille $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha_i})_{i\in I}$. En effet, pour tous $x \in H$ et $j \in I$, on a

$$\langle D^* e_j, x\rangle = \langle e_j, Dx\rangle = \langle e_j, \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle \alpha_i e_i\rangle = \sum_{i\in I}\overline{\alpha_i}\langle e_i, x\rangle\langle e_j, e_i\rangle = \overline{\alpha_j}\langle e_j, x\rangle.$$

Proposition 3.1.3. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H, K)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors*

(i) $(\alpha A + B)^* = \overline{\alpha}A^* + B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$ *et* $A^{**} = A$.

(ii) *A est inversible si, et seulement si, A^* l'est. Dans ce cas,* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

(iii) $\|A\| = \|A^*\| = \|A^*A\|^{1/2}$.

(iv) $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, y\rangle| : (x, y) \in H \times K,\ \|x\| = \|y\| = 1\}$.

Preuve. (i) et (ii) sont faciles à vérifier.

(iii) Soit $x \in H$ tel que $\|x\| \le 1$, on a

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \le \|A^*A\|\|x\| \le \|A^*A\|,$$

et donc $\|A\|^2 \le \|A^*A\| \le \|A^*\|\|A\|$. Par suite, $\|A\| \le \|A^*\|$. Par dualité, on trouve aussi $\|A^*\| \le \|A^{**}\| = \|A\|$. D'où l'égalité.

(iv) Posons $M = \sup\{|\langle Ax, y\rangle| : (x, y) \in H \times K,\ \|x\| = \|y\| = 1\}$. Comme $|\langle Ax, y\rangle| \le \|A\|\|x\|\|y\|$ pour tout $(x, y) \in H \times K$, alors $M \le \|A\|$. D'autre part, pour tout $x \in H$ de norme 1, on a $\|Ax\| = 0$ si $Ax = 0$, et $\|Ax\| = \langle Ax, A(\frac{1}{\|Ax\|}x)\rangle$ sinon ; et donc $\|Ax\| \le M$. D'où $\|A\| \le M$. □

Proposition 3.1.4. *Soit $A \in \mathcal{B}(H, K)$, alors*

(i) $\mathrm{N}(A) = \mathrm{R}(A^*)^\perp$ *et* $\mathrm{N}(A^*) = \mathrm{R}(A)^\perp$.

(ii) $\mathrm{N}(A^*A) = \mathrm{N}(A)$ *et* $\overline{\mathrm{R}(A^*A)} = \overline{\mathrm{R}(A^*)}$.

Preuve. (i) Pour tout $x \in H$, on a

$$x \in \mathrm{N}(A) \quad \Leftrightarrow \quad Ax = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = 0 \ \ \forall y \in K \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{R}(A^*)^\perp.$$

D'où $\mathrm{N}(A) = \mathrm{R}(A^*)^\perp$. Il en résulte que $\mathrm{N}(A^*) = \mathrm{R}(A^{**})^\perp = \mathrm{R}(A)^\perp$.

(ii) Clairement, on a $\mathrm{N}(A) \subseteq \mathrm{N}(A^*A)$. D'autre part, on a

$$A\mathrm{N}(A^*A) \subseteq \mathrm{N}(A^*) \cap \mathrm{R}(A) = \mathrm{R}(A)^\perp \cap \mathrm{R}(A) = \{0\},$$

et donc $\mathrm{N}(A^*A) \subseteq \mathrm{N}(A)$. D'où l'égalité. Il vient ensuite que

$$\overline{\mathrm{R}(A^*A)} = \mathrm{N}(A^*A)^\perp = \mathrm{N}(A)^\perp = \overline{\mathrm{R}(A^*)}.$$

Cela termine la preuve. □

Corollaire 3.1.5. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, alors*

(i) *A est injectif à image fermée si, et seulement si, A^* est surjectif.*

(ii) *A est surjectif si, et seulement si, A^* est injectif à image fermée.*

(iii) $\sigma(A) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}$.

3.2 Opérateurs auto-adjoints et opérateurs normaux

On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est

1. *auto-adjoint* si $A = A^*$;
2. *normal* si $A^*A = AA^*$.

Exemple 3.2.1. 1. Soit $e \in H$ non nul, alors l'opérateur $P = e \otimes e$ de rang 1 est auto-adjoint.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, l'opérateur λI est normal mais pas auto-adjoint.

Proposition 3.2.2. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, alors*

$$A \text{ est auto-adjoint} \quad \Leftrightarrow \quad \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R} \ \forall x \in H.$$

Preuve. Supposons que A est auto-adjoint. Soit $x \in H$, on a

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle},$$

et donc $\langle Ax, x\rangle$ est un nombre réel.

Réciproquement, supposons que $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$. Soient $x, y \in H$ et $c \in \mathbb{C}$. On a

$$\langle A(x + cy), x + cy\rangle = \langle Ax, x\rangle + \bar{c}\langle Ax, y\rangle + c\langle Ay, x\rangle + |c|^2\langle Ay, y\rangle \in \mathbb{R}.$$

Donc $\bar{c}\langle Ax, y\rangle + c\langle Ay, x\rangle$ est réel, et par suite

$$\bar{c}\langle Ax, y\rangle + c\langle Ay, x\rangle = \overline{\bar{c}\langle Ax, y\rangle + c\langle Ay, x\rangle} = c\langle A^*y, x\rangle + \bar{c}\langle A^*x, y\rangle.$$

En prenant $c = 1$ et $c = i$, on obtient $\langle Ax, y\rangle = \langle A^*x, y\rangle$. D'où, $A = A^*$. □

Proposition 3.2.3. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur auto-adjoint, alors*

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H,\ \|x\| = 1\}.$$

Preuve. Posons $M = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H,\ \|x\| = 1\}$. Clairement, on a $M \leq \|A\|$.

Soient $x, y \in H$ de norme 1. On a

$$\langle A(x \pm y), x \pm y\rangle = \langle Ax, x\rangle \pm 2\mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, y\rangle,$$

et donc $\langle A(x + y), x + y\rangle - \langle A(x - y), x - y\rangle = 4\mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle$. Comme $|\langle Az, z\rangle| \leq M\|z\|^2$ pour tout $z \in H$, on trouve par l'identité du parallélogramme que

$$4\mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle \leq M\left(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\right) = 2M\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 4M,$$

et par suite $\mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle \leq M$. Il vient donc

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle \leq M\|Ax\|,$$

et par conséquent $\|Ax\| \leq M$. D'où, $\|A\| \leq M$. □

Corollaire 3.2.4. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ vérifiant $\langle Ax, x\rangle = 0$ pour tout $x \in H$. Alors $A = 0$.*

Proposition 3.2.5. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur auto-adjoint, alors*

$$\mathrm{r}(A) = \|A\| \quad \text{et} \quad \sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|] \subseteq \mathbb{R},$$

où $\mathrm{r}(A)$ désigne le rayon spectral de A.

Preuve. On a $\|A^2\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$, et donc par récurrence on vérifie facilement que $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$ pour tout $n \in N$. Il vient donc

$$\mathrm{r}(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|A^{2^n}\|^{1/2^n} = \|A\|.$$

Comme $\sigma(A) \subseteq \overline{\mathrm{D}}(0, \|A\|)$, alors il suffit de montrer que $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Soient $\lambda = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ et $x \in H$. On a

$$\|(A-\lambda)x\|^2 = \|(A-a)x\|^2 + b^2\|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle (A-a)x, \mathrm{i}bx\rangle.$$

Vu que $A - a$ est auto-adjoint, il vient que $\langle (A-a)x, x\rangle \in \mathbb{R}$, et donc $\mathrm{Re}\langle (A-a)x, \mathrm{i}bx\rangle = 0$. D'où, $\|(A-\lambda)x\|^2 = \|(A-a)x\|^2 + b^2\|x\|^2 \geq b^2\|x\|^2$. De même, en prenant $\overline{\lambda}$ et $A^* = A$, on a aussi

$$\|(A^* - \overline{\lambda})x\|^2 \geq b^2\|x\|^2.$$

Si $b \neq 0$, alors $A - \lambda$ et $A - \overline{\lambda}$ sont injectifs à image fermée, et cela implique que A est inversible. D'où $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. □

La *partie réelle* et la *partie imaginaire* d'un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ sont définies respectivement par

$$\frac{1}{2}(A + A^*) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\mathrm{i}}(A - A^*).$$

Ce sont deux opérateurs auto-adjoints et $A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \mathrm{i}\frac{1}{2\mathrm{i}}(A - A^*)$.

Théorème 3.2.6. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est normal ;*

(ii) *$\|Ax\| = \|A^*x\|$ pour tout $x \in H$;*

(iii) *La partie réelle et la partie imaginaire de A commutent.*

Preuve. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) vient du fait que, pour tout $x \in H$, on a

$$\|Ax\|^2 - \|A^*x\|^2 = \langle (A^*A - AA^*)x, x\rangle.$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) découle du fait que

$$A^*A = B^2 - \mathrm{i}CB + \mathrm{i}BC + C^2 \quad \text{et} \quad AA^* = B^2 + \mathrm{i}CB - \mathrm{i}BC + C^2,$$

où $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$ et $C = \frac{1}{2\mathrm{i}}(A - A^*)$. □

Notons que si $A \in \mathcal{B}(H)$ est normal, alors il en est de même pour $A + \alpha I$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

Corollaire 3.2.7. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal. Alors*

(i) $\mathrm{N}(A) = \mathrm{N}(A^*) = \mathrm{N}(A^2)$.

(ii) *A est inversible si, et seulement si, A est injectif à image fermée.*

(iii) $\mathrm{N}(A - \alpha) \perp \mathrm{N}(A - \beta)$ *pour tous complexes $\alpha \neq \beta$.*

Preuve. (i) D'après le théorème précédent, on a $\mathrm{N}(A) = \mathrm{N}(A^*)$. Comme

$$\mathrm{N}(A) \cap \mathrm{R}(A) = \mathrm{N}(A^*) \cap \mathrm{R}(A) = \mathrm{R}(A)^\perp \cap \mathrm{R}(A) = \{0\},$$

alors $\mathrm{a}(A) \leq 1$, et par suite $\mathrm{N}(A) = \mathrm{N}(A^2)$.

(ii) Si A est injectif à image fermée, alors

$$\mathrm{R}(A) = \overline{\mathrm{R}(A)} = \mathrm{N}(A^*)^\perp = \mathrm{N}(A)^\perp = \{0\}^\perp = H.$$

D'où A est inversible.

(iii) Il est facile de vérifier que $(A - \alpha I)_{|\mathrm{N}(A-\beta)} = (\beta - \alpha)I$, et donc $\mathrm{N}(A - \beta I) \subseteq \mathrm{R}(A - \alpha I)$. Mais, puisque $\mathrm{N}(A - \alpha I) = \mathrm{N}((A - \alpha I)^*) = \mathrm{R}(A - \alpha I)^\perp$, alors $\mathrm{N}(A - \beta I) \perp \mathrm{N}(A - \alpha I)$. □

Proposition 3.2.8. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal, alors* $\mathrm{r}(A) = \|A\|$. *En particulier, il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $|\lambda| = \|A\|$.*

Preuve. Comme A^*A est auto-adjoint, d'après la preuve de la Proposition 3.2.5, on a $\|(A^*A)^{2^n}\| = \|A^*A\|^{2^n}$, et donc $\|A^{2^n}\|^2 = \|(A^*A)^{2^n}\| = \|A^*A\|^{2^n} = \|A\|^{2^{n+1}}$ pour tout $n \geq 1$. D'où $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$, et par suite $\mathrm{r}(A) = \|A\|$. □

Un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est dit *quasi-nilpotent* si $\sigma(T) = \{0\}$. Dans ce cas, son rayon spectral est évidemment nul.

Corollaire 3.2.9. *Tout opérateur normal et quasi-nilpotent dans $\mathcal{B}(H)$ est nul.*

3.3 Projections orthogonales et isométries

On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est :

1. une *projection orthogonale* si $A^2 = A$ et $N(A) = R(A)^\perp$;
2. *unitaire* si $A^*A = AA^* = I$;
3. une *isométrie* si $\|Ax\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$;
4. une *isométrie partielle* si $\|Ax\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{N}(A)^\perp$.

Notons que tout isométrie est injective à image fermée, et toute isométrie partielle est à image fermée.

Proposition 3.3.1. *Soit $P \in \mathcal{B}(H)$ un idempotent non nul. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *P est une projection orthogonale ;*

(ii) *$\|P\| = 1$;*

(iii) *$\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$ pour tout $x \in H$;*

(iv) *P est auto-adjoint ;*

(v) *P est normal.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Comme $P^2 = P$, alors $\|P\| \geq 1$. Soit $x = x_1 + x_2$ suivant la décomposition orthogonale $H = \mathrm{N}(P) \oplus \mathrm{R}(P)$, on a

$$\|Px\|^2 = \|x_2\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2,$$

et donc $\|Px\| \leq \|x\|$. D'où $\|P\| \leq 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $x = x_1 + x_2$ suivant la décomposition $H = \mathrm{N}(P) \oplus \mathrm{N}(P)^\perp$. Comme $x_2 - Px_2 \in \mathrm{R}(I - P) = \mathrm{N}(P)$, alors

$$0 = \langle x_2 - Px_2, x_2\rangle = \|x_2\|^2 - \langle Px_2, x_2\rangle,$$

et par suite $\|x_2\|^2 = \langle Px_2, x_2\rangle \leq \|Px_2\|\|x_2\| \leq \|x_2\|^2$. Il en résulte que

$$\|x_2\|^2 = \langle Px_2, x_2\rangle = \|Px_2\|^2,$$

et par conséquent

$$\|x_2 - Px_2\|^2 = \|x_2\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle Px_2, x_2\rangle + \|Px_2\|^2 = 0.$$

D'où $x_2 = Px_2$. Il vient donc que

$$\langle Px, x\rangle = \langle Px_2, x_1 + x_2\rangle = \langle x_2, x_1 + x_2\rangle = \|x_2\|^2 = \|Px_2\|^2 = \|Px\|^2.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) sont évidentes.

(v) $\Rightarrow$ (i). On a $\mathrm{N}(P) = \mathrm{N}(P^*) = \mathrm{R}(P)^\perp$. □

Proposition 3.3.2. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est une isométrie ;*

(ii) *$A^*A = I$;*

(iii) *$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tous $x, y \in H$.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Pour tout $x \in H$, on a

$$\langle (A^*A - I)x, x\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle - \langle x, x\rangle = \|Ax\|^2 - \|x\|^2 = 0.$$

D'où $A^*A = I$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Pour tous $x, y \in H$, on a

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*Ax, y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) est évidente. □

Soit $A \in \mathcal{B}(H)$. On dit qu'un sous-espace fermé M de H est *A-réduisant* s'il est invariant par A et A^* ; i.e. $AM \subseteq M$ et $A^*M \subseteq M$.

On note que si $AM \subseteq M$, alors $A^*M^\perp \subseteq M^\perp$. Par conséquent, M est A-réduisant si, et seulement si, $AM \subseteq M$ et $AM^\perp \subseteq M^\perp$.

Proposition 3.3.3. *Soit $U \in \mathcal{B}(H)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *U est une isométrie partielle ;*

(ii) *U^*U est une projection orthogonale d'image $\mathrm{N}(U)^\perp$;*

(iii) $UU^*U = U$.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Comme U^*U est auto-adjoint et $N(U)$ est U^*U-invariant, alors $N(U)^\perp$ est U^*U-invariant. Soit $x \in N(U)^\perp$, alors $\|Ux\| = \|x\|$ et

$$\langle U^*Ux - x, x\rangle = \langle Ux, Ux\rangle - \langle x, x\rangle = \|Ux\|^2 - \|x\|^2 = 0.$$

D'où $U^*U_{|N(U)^\perp} = I$. En d'autres termes, $U^*U = 0 \oplus I$ suivant $H = N(U) \oplus N(U)^\perp$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Clairement, l'égalité $UU^*U = U$ est vérifiée sur $N(U)$. Sur $N(U)^\perp$ on a $U^*U_{|N(U)^\perp} = I$ et donc $UU^*U_{|N(U)^\perp} = U_{|N(U)^\perp}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Comme $N(U)^\perp = \overline{R(U^*)}$, alors par continuité il suffit de montrer que $\|Uy\| = \|y\|$ pour tout $y \in R(U^*)$. Soit $y = U^*x$ avec $x \in H$, vu que $U^*UU^* = U^*$ on trouve

$$\|y\|^2 = \langle y, y\rangle = \langle U^*x, y\rangle = \langle U^*UU^*x, y\rangle = \langle Uy, Uy\rangle = \|Uy\|^2.$$

D'où le résultat. □

Corollaire 3.3.4. *Soit $U \in \mathcal{B}(H)$, alors U est une isométrie partielle si, et seulement si, U^* l'est aussi.*

3.4 Racine carrée et décomposition polaire

On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est positif, et on note $A \geq 0$, si

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in H.$$

Remarque 3.4.1. Soient $A \in \mathcal{B}(H)$, alors

(i) A^*A et AA^* sont toujours positifs.

(ii) Si A est positif, alors $A = A^*$ et $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$.

(iii) Si A est positif, alors A^n l'est aussi car

$$\langle A^n x, x\rangle = \begin{cases} \langle AA^p x, A^p x\rangle \text{ si } n = 2p+1, \\ \langle A^p x, A^p x\rangle \text{ si } n = 2p. \end{cases}$$

Proposition 3.4.2. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur positif, alors $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.*

Preuve. Puisque A est automatiquement auto-adjoint, on a $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \sigma(A)$ non nul, alors $A - \alpha$ n'est pas injectif à image fermée, et donc il existe une suite $(x_n)_n$ dans H telle que $\|x_n\| = 1$, pour tout $n \geq 0$, et $\lim_{n\to\infty}(A - \alpha)x_n = 0$. Si $\alpha < 0$, alors

$$\|(A-\alpha)x_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 - 2\alpha\langle Ax_n, x_n\rangle + \alpha^2 \geq \alpha^2$$

car $\langle Ax_n, x_n\rangle \geq 0$, ce qui contredit $\lim_{n\to\infty}(A-\alpha)x_n = 0$. □

Le commutant d'un sous-ensemble $\Omega \subseteq \mathcal{B}(H)$ est

$$\Omega^c = \{T \in \mathcal{B}(H) : TS = ST \ \forall S \in \Omega\}$$

Lemme 3.4.3. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur positif tel que $\|A\| \leq 1$. Alors*

$$1 - A \geq 0 \quad \textit{et} \quad \|1 - A\| \leq 1.$$

Preuve. Vu que $\|A\| = \sup_{\|x\|=1}\langle Ax, x\rangle \leq 1$, il vient que, pour tout $x \in H$,

$$\langle (1-A)x, x\rangle = \|x\|^2 - \langle Ax, x\rangle = \|x\|^2\left(1 - \langle Ay, y\rangle\right) \geq 0, \quad \text{avec } y = \frac{1}{\|x\|}x.$$

D'où, $1 - A$ est positif, et par conséquent

$$\|1 - A\| = \sup_{\|x\|=1}\langle (1-A)x, x\rangle = \sup_{\|x\|=1}(1 - \langle Ax, x\rangle) \leq 1.$$

Cela termine la preuve. □

Lemme 3.4.4. *Soit $f(z) = \sqrt{1-z}$ sur $\mathrm{D}(0,1)$. Alors, le développement en série entière de f converge absolument sur $\overline{\mathrm{D}}(0,1)$.*

Preuve. La fonction f étant holomorphe sur $\mathrm{D}(0,1)$, on a donc $f(z) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ pour tout $z \in \mathrm{D}(0,1)$, et la convergence est absolue sur $\mathrm{D}(0,1)$. Vu les dérivées de f

$$f^{(k)}(z) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \ldots \times \frac{2k-3}{2} \times (1-z)^{\frac{1}{2}-k},$$

on trouve que $f^{(k)}(0) < 0$, donc $c_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il vient que

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} c_n = \lim_{t\to 1^-}\sum_{n=1}^{N} c_n t^n \leq \lim_{t\to 1^-}\sqrt{1-t} = 1.$$

D'où, $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \leq 1$. □

Remarque 3.4.5. Comme $f(z)^2 = 1 - z$ et la convergence est absolue sur $\overline{\mathrm{D}}(0,1)$, alors $(\sum_{n\geq 1} c_n z^n)^2$ converge absolument sur $\overline{\mathrm{D}}(0,1)$, et donc

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n\right)^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = -z,$$

i.e. $c_1 = 1/2$ et $\sum_{\substack{p+q=m \\ p,q\geq 1}} c_p c_q = 2c_m$ pour tout $m \geq 2$.

Théorème 3.4.6 (Racine carrée d'un opérateur positif)**.** *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur positif. Alors, il existe un opérateur positif unique $B \in \mathcal{B}(H)$ tel que $B^2 = A$. De plus, B est limite de polynômes en A et $\{A\}^c \subseteq \{B\}^c$.*

L'opérateur B est appelé la racine carrée de A, et on le note $\sqrt{A}$ ou $A^{\frac{1}{2}}$

Preuve. Quitte à considérer $\frac{1}{\|A\|}A$, on peut supposer que $\|A\| \leq 1$. Alors, $1 - A \geq 0$ et $\|1 - A\| \leq 1$.

Existence : D'après le Lemme précédent, on définit bien un opérateur borné $B \in \mathcal{B}(H)$ par $B = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n (1-A)^n$. De plus, B est limite de polynômes en A, et donc $\{A\}^c \subseteq \{B\}^c$. Comme la série définissant B converge absolument en norme, alors d'après la remarque précédente, on a $B^2 = 1 - (1 - A) = A$.

Positivité : Soit $x \in H$, on a

$$\langle Bx, x\rangle = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle (1-A)^n x, x\rangle = \|x\|^2 \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle (1-A)^n u, u\rangle\right) \quad \text{où } u = \|x\|^{-1}x.$$

Comme $1 - A$ est positif, il en est de même pour $(1 - A)^n$, et donc

$$\langle (1-A)^n u, u\rangle \leq \|1 - A\|^n \|u\|\|u\| \leq 1.$$

D'où, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle (1-A)^n u, u\rangle \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \leq 1$, et donc $\langle Bx, x\rangle \geq 0$.

Unicité : Supposons qu'il existe un autre opérateur positif $C \in \mathcal{B}(H)$ tel que $C^2 = A$. Comme $AC = CA$, il vient que $BC = CB$, et par suite $(C - B)(C + B) = C^2 - B^2 = 0$. Soit $x \in H$, il vient alors que

$$\langle (C-B)^2 Cx, x\rangle + \langle (C-B)^2 Bx, x\rangle = \langle (C-B)^2 (C+B)x, x\rangle = 0.$$

Mais, $C \geq 0$ et $C - B = (C - B)^*$, donc

$$\langle (C-B)^2 Cx, x\rangle = \langle C(C-B)x, (C-B)x\rangle \geq 0,$$

et de même $\langle (C-B)^2Bx, x\rangle \geq 0$. D'où, $\langle (C-B)^2Cx, x\rangle = \langle (C-B)^2Bx, x\rangle = 0$. Cela signifie que $(C-B)^2C = (C-B)^2B = 0$. Il vient donc que $(C-B)^3 = (C-B)^2C - (C-B)^2B = 0$ et $\|C-B\| = r(C-B) = 0$, ce qui donne $C = B$. □

Le *module* d'un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est défini par $|A| = \sqrt{A^*A}$. Remarquons que $|A|$ est un opérateur positif, et donc auto-adjoint. De plus, $\||A|x\| = \|Ax\|$ pour tout $x \in H$, car

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = \langle |A|^2x, x\rangle = \langle |A|x, |A|x\rangle = \||A|x\|^2.$$

En particulier, on a $\mathrm{N}(|A|) = \mathrm{N}(A)$.

Exemple 3.4.7.

1. Soit $x, y \in H$ non nuls, et considérons l'opérateur $F = x \otimes y$. Alors, le module de F est $|F| = \frac{\|x\|}{\|y\|} y \otimes y$. En effet, on a

$$F^*F = (y \otimes x)(x \otimes y) = \langle x, x\rangle y \otimes y = \|x\|^2 y \otimes y,$$

et

$$\left(\frac{\|x\|}{\|y\|} y \otimes y\right)^2 = \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2}\langle y, y\rangle y \otimes y = \|x\|^2 y \otimes y.$$

2. Pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint, on a $|T| = T$.

Théorème 3.4.8 (Décomposition polaire)**.** *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, alors il existe une isométrie partielle $U \in \mathcal{B}(H)$ telle que $A = U|A|$. De plus, U est unique s'elle vérifie de plus* $\mathrm{N}(U) = \mathrm{N}(A)$ *; dans ce cas on appelle $A = U|A|$ la décomposition polaire de A.*

Preuve. Puisque $\mathrm{N}(|A|) = \mathrm{N}(A)$, on définit bien une application linéaire de $\mathrm{R}(|A|)$ dans $\mathrm{R}(A)$ par $|A|x \mapsto Ax$. C'est une isométrie qui se prolonge par continuité en une isométrie $V : \overline{\mathrm{R}(|A|)} \to \overline{\mathrm{R}(A)}$. Soit P la projection orthogonale sur $\mathrm{N}(A)^\perp = \mathrm{N}(|A|)^\perp = \overline{\mathrm{R}(|A|)}$ et posons $U = VP$. Alors, U est une isométrie partielle, car $\mathrm{N}(U) = \mathrm{N}(P) = \mathrm{N}(A)$, qui vérifie $U|A| = VP|A| = V|A| = A$.

Supposons qu'il existe une autre isométrie partielle $W \in \mathcal{B}(H)$ qui vérifie $A = W|A|$ et $\mathrm{N}(W) = \mathrm{N}(A)$. On a donc $W = U$ sur $\overline{\mathrm{R}(|A|)}$. Vu que

$$\mathrm{R}(|A|)^\perp = \mathrm{N}(|A|) = \mathrm{N}(A) = \mathrm{N}(U) = \mathrm{N}(W),$$

on obtient $W = U$. □

Proposition 3.4.9. *Soient $A \in \mathcal{B}(H)$ et $A = U|A|$ la décomposition polaire de A. Alors*

$$U^*U|A| = |A|, \quad U^*A = |A|, \quad UU^*A = A \quad \text{et} \quad U|A|U^* = |A^*|.$$

Preuve. Comme U^*U est une projection orthogonale sur $\mathrm{N}(U)^\perp = \overline{\mathrm{R}(|A|)}$, alors

$$U^*U|A| = |A|.$$

Par suite, on trouve que

$$U^*A = U^*U|A| = |A| \quad \text{et} \quad UU^*A = UU^*U|A| = U|A| = A.$$

Comme $(U|A|U^*)^2 = U|A|U^*U|A|U^* = U|A|^2U^* = AA^* = |A^*|^2$, alors $U|A|U^* = |A^*|$ car se sont deux opérateur positifs. □

Corollaire 3.4.10. *Un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ est compact si, et seulement si, $|A|$ est compact.*

3.5 Décomposition d'un opérateur compact normal

On rappelle que H est somme hilbertienne d'une famille $(H_i)_{i\in I}$ de sous-espaces fermés et orthogonaux deux à deux si l'espace engendré par la réunion des H_i est dense dans H ; on écrit $H = \oplus_{i\in I} H_i$. Dans ce cas, pour tout $x \in H$, on a

$$x = \sum_{i\in I} P_i x \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i\in I} \|P_i x\|^2,$$

où $P_i \in \mathcal{B}(H)$ est la projection orthogonale sur H_i.

Théorème 3.5.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur compact et normal de spectre $\sigma(T) = \{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ où $\lambda_0 = 0$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$ et $(|\lambda_n|)_n$ est décroissante vers zéro ; et soit P_n la projection orthogonale sur $\mathrm{N}(T - \lambda_n)$ pour tout $n \geq 0$. Alors*

$$H = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{N}(T - \lambda_n) \quad \text{et} \quad T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n,$$

où la série converge en norme vers T.

Preuve. Posons $F = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{N}(T - \lambda_n)$ qui est un sous-espace fermé bien défini car T est normal. Il est bien clair que $TF \subseteq F$, et comme $TT^* = T^*T$, on a aussi $T^*F \subseteq F$, et donc $TF^\perp \subseteq F^\perp$. En particulier, $T_0 = T_{|F^\perp}$ est normal et compact. Comme $\mathrm{N}(T_0 - \alpha) = \mathrm{N}(T - \alpha) \cap F^\perp = \{0\}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $\sigma_{\mathrm{p}}(T_0) = \emptyset$, et donc $\sigma(T_0) = \{0\}$. Par suite, $T_0 = 0$ et $F^\perp = \{0\}$, et donc $H = F$.

Soit $x \in H$, on a $x = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x$ et $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n x\|^2$. Il vient que

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} TP_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x.$$

Posons $T_k = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n P_n$, on a $\| \sum_{n=k+1}^{N} \lambda_n P_n x\|^2 = \sum_{n=k+1}^{N} |\lambda_n|^2 \|P_n x\|^2$, et donc

$$\|T - T_k\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \| \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda_n P_n x\|^2 \leq \sup_{n \geq k+1} |\lambda_n|^2 \sup_{\|x\|=1} \sum_{n=k+1}^{\infty} \|P_n x\|^2 \leq |\lambda_{k+1}|^2 \underset{k+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ converge en norme vers T. □

Notons que si $P \in \mathcal{B}(H)$ est une projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie et de base orthonormale $\{e_1, \ldots, e_n\}$, alors $P = \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes e_k$.

Corollaire 3.5.2. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur compact et normal. Alors H admet une base orthonormale formée de vecteurs propres de T. De plus, il existe une suite $\{\alpha_n\}_{n\geq 1} = \sigma(T) \setminus \{0\}$ et une base orthonormale $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de $\mathrm{N}(T)^\perp$ formée de vecteurs propres de T tels que*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \otimes e_n,$$

où la série converge en norme vers T et $Te_n = \alpha_n e_n$ pour tout $n \geq 1$. En particulier, si T est auto-adjoint alors la suite $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ est réelle ; et si T est injectif alors H est séparable.

Preuve. D'après le théorème précédent, on a

$$H = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{N}(T - \lambda_n) \quad \text{et} \quad T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n.$$

Il vient que la réunion des bases orthonormales des $\mathrm{N}(T-\lambda_n)$ est une base orthonormale de H formée de vecteurs propres de T. Posons $d_0 = 0$ et $d_n = \dim \mathrm{N}(T - \lambda_n)$ pour $n \geq 1$. Soient $\{e_{d_{i-1}+1}, \ldots, e_{d_{i-1}+d_i}\}$ une base orthonormale de $\mathrm{N}(T - \lambda_i)$ et $\alpha_k = \lambda_i$ pour $d_{i-1} + 1 \leq k \leq d_{i-1} + d_i$ et $i \geq 1$. On a donc

$$\lambda_i P_i = \sum_{k=d_{i-1}+1}^{d_{i-1}+d_i} \alpha_k e_k \otimes e_k \quad \text{pour tout } i \geq 1,$$

et par l'associativité des familles sommables, on trouve que $T = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \otimes e_n$. □

Définition 3.5.3. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur compact. On appelle *valeur singulière* de T toute valeur propre de $|T|$

Comme $\sigma_{\mathrm{p}}(|T|) \subseteq \sigma(|T|) \subseteq \mathbb{R}^+$, on note les valeurs singulières non nulles de T par une suite $(\mu_n(T))_{n\geq 1}$ de réels positifs qui décroit vers zéro avec $\mathrm{Card}\{k \in \mathbb{N} : \mu_k(T) = \mu_m(T)\} = \dim \mathrm{N}(|T| - \mu_n)$.

Théorème 3.5.4. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur compact. Alors il existe une base orthonormale $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de $\mathrm{N}(T)^\perp$ et une famille orthonormale $\{f_n\}_{n\geq 1}$ dans H telles que*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) f_n \otimes e_n \quad \text{et} \quad |T| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n e_n \otimes e_n.$$

Preuve. Comme T^*T est un compact auto-adjoint, alors il existe une base orthonormale $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de $\mathrm{N}(T^*T)^\perp = \mathrm{N}(T)^\perp$ formée de vecteurs propres de T^*T. En particulier, on a $T^*Te_n = |T|^2 e_n = \mu_n(T)^2 e_n$ pour tout $n \geq 1$. Posons $f_n = \mu_n(T)^{-1} Te_n$ pour $n \geq 1$, on a donc

$$\langle f_n, f_m \rangle = \mu_n(T)^{-1}\mu_m(T)^{-1}\langle Te_n, Te_m\rangle = \mu_n(T)^{-1}\mu_m(T)^{-1}\langle e_n, T^*Te_m\rangle = \mu_n(T)^{-1}\mu_m(T)\langle e_n, e_m\rangle,$$

et par suite la famille $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est orthonormale. En complétant la famille $\{e_n\}_{n\geq 1}$ par une base orthonormale de $\mathrm{N}(T)$ pour avoir une base orthonormale de H, on trouve que pour tout $x \in H$, on a $x = \sum_i \langle x, e_i\rangle e_i$ et donc

$$Tx = \sum_i \langle x, e_i\rangle Te_i = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)\langle x, e_n\rangle f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)(f_n \otimes e_n)x.$$

Comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mu_n(T)\langle x, e_n\rangle f_n\|^2 \leq \sup_{n\geq 1} \mu_n(T)^2 \|x\|^2 = \mu_1(T)^2\|x\|^2 < \infty,$$

alors $T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) f_n \otimes e_n$.

Finalement, puisque $|T|e_n = \mu_n(T)e_n$ pour tout $n \geq 1$, on trouve de même que $|T| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n e_n \otimes e_n$. □

4 Classes de Schatten

Dans toute la suite, H désigne un espace de Hilbert complexe de dimension infinie.

4.1 Introduction

On rappelle que $\ell_p(\mathbb{N})$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$, et que

$$C_{00}(\mathbb{N}) \subseteq \ell_1(\mathbb{N}) \subseteq \ell_2(\mathbb{N}) \subseteq C_0(\mathbb{N}) \subseteq \ell_\infty(\mathbb{N}),$$

où $C_{00}(\mathbb{N})$ est le sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang, et $C_0(\mathbb{N})$ est l'espace de Banach des suites convergentes vers zéro.

Soient $(e_n)_{n\geq 0}$ une famille orthonormale de H et $\Phi : \ell_\infty(\mathbb{N}) \to \mathcal{B}(H)$ l'application linéaire définie par

$$\Phi(a)x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \langle x, e_n \rangle e_n \quad \text{pour tout } x \in H,$$

où $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$. C'est une application bien définie car

$$\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \langle x, e_n \rangle e_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|a\|_\infty^2 \|x\|^2,$$

et donc $\Phi(a)$ est un opérateur borné et $\|\Phi(a)\| \leq \|a\|_\infty$. Mais, comme $\|\Phi(a)e_n\| = |a_n| \leq \|\Phi(a)\|$, alors $\|\Phi(a)\| = \|a\|_\infty$. Cela signifie que Φ est une isométrie.

Il est facile de voir que $\Phi^{-1}(\mathcal{F}(H)) = C_{00}(\mathbb{N})$. Vérifions que $\Phi^{-1}(\mathcal{K}(H)) = C_0(\mathbb{N})$:

Soit $a = (a_n)_n \in C_0(\mathbb{N})$, en posant $\Phi_p(a) = \sum_{n=0}^{p} a_n e_n \otimes e_n$, on trouve que

$$\|\Phi(a) - \Phi_p(a)\| = \sup_{\|x\|=1} \|\sum_{n\geq p+1}^{\infty} a_n \langle x, e_n \rangle e_n\| \leq \sup_{n\geq p+1} |a_n| \to_{p+\infty} 0.$$

D'où, $\Phi(a)$ est limite d'opérateurs de rang fini, donc il est compact. Inversement, soit $b = (b_n)_n \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ tel que $\Phi(b)$ est compact. Il vient que

$$|b_n| = \|\Phi(b)e_n\| \to_{n+\infty} 0,$$

et donc $b \in C_0(\mathbb{N})$.

Question : Quels sont les sous-espaces de $\mathcal{B}(H)$ dont l'image réciproque par Φ correspond à $\ell_1(\mathbb{N})$ ou à $\ell_2(\mathbb{N})$?

4.2 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Soient $(e_i)_{i\in I}$ et $(e_j)_{j\in J}$ deux bases hilbertiennes de H. Alors, pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$, on a

$$\sum_{i\in I} \|Te_i\|^2 = \sum_{j\in J} \|T^* f_j\|^2 = \sum_{j\in J} \|T f_j\|^2 \in [0, +\infty].$$

En effet, d'après l'égalité de Parseval, on a

$$\sum_{i\in I} \|Te_i\|^2 = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} |\langle Te_i, f_j\rangle|^2 = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} |\langle e_i, T^* f_j\rangle|^2 = \sum_{j\in J} \|T^* f_j\|^2.$$

De même, on trouve que $\sum_{j\in J} \|T f_j\|^2 = \sum_{j\in J} \|T^* f_j\|^2$.

Cela montre que la quantité $\sum_{i\in I} \|Te_i\|^2$ ne dépend pas du choix d'une base hilbertienne de H. On pose alors

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{i\in I} \|Te_i\|^2\right)^{1/2}.$$

Définition 4.2.1. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est de *Hilbert-Schmidt* si $\|T\|_2 < \infty$.

On note par $C_2(H)$ l'ensemble de tous les opérateurs de Hilbert-Schmidt dans $\mathcal{B}(H)$.

Remarque 4.2.2. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$.

(i) $\|T\|_2 = \|T^*\|_2$. En particulier, T est de Hilbert-Schmidt si, et seulement si, T^* l'est aussi.

(ii) $\|T\|_2 = \||T|\|_2$ vu que $\|Tx\| = \||T|x\|$ pour tout $x \in H$. En particulier, T est de Hilbert-Schmidt si, et seulement si, $|T|$ l'est aussi.

Exemple 4.2.3. Soient $F = x \otimes y$ un opérateur de rang 1. Alors, F est de Hilbert-Schmidt et $\|F\|_2 = \|F\|$. En effet, soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H, on a

$$\|F\|_2^2 = \sum_{i\in I} \|Fe_i\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle e_i, y\rangle|^2 \|x\|^2 = \|y\|^2\|x\|^2 = \|F\|^2.$$

Lemme 4.2.4. *Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, on a*

$$\|\lambda T\|_2 = |\lambda|\, \|T\|_2\,, \quad \|T + S\|_2 \leq \|T\|_2 + \|S\|_2 \quad \text{et} \quad \|T\| \leq \|T\|_2$$

Preuve. La première égalité est évidente. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H.

Montrons que $\|T + S\|_2 \leq \|T\|_2 + \|S\|_2$. D'après l'inégalité de Minkowski, on a

$$\begin{aligned} \|T + S\|_2 &= \left(\sum_{i\in I} \|(T+S)e_i\|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i\in I} (\|Te_i\| + \|Se_i\|)^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{i\in I} \|Te_i\|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i\in I} \|Se_i\|^2\right)^{1/2} = \|T\|_2 + \|S\|_2\,. \end{aligned}$$

Montrons que $\|T\| \leq \|T\|_2$. Soit $x \in H$. On a $x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$ et, d'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|\sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle Te_i\| \leq \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle| \|Te_i\| \\ &\leq \left(\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i\in I} \|Te_i\|^2\right)^{1/2} = \|x\|\, \|T\|_2\,. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Proposition 4.2.5. $(\mathcal{C}_2(H), \|.\|_2)$ *est un espace de Banach.*

Preuve. D'après le lemme précédent, $\mathcal{C}_2(H)$ est un espace normé. Soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}_2(H)$. Comme $\|.\| \leq \|.\|_2$, elle est a fortiori de Cauchy dans $\mathcal{B}(H)$, et donc elle converge vers un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$. Soient $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H et $\varepsilon > 0$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|T_p - T_q\right\|_2 = \left(\sum_{i\in I} \|T_p e_i - T_q e_i\|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon \quad \text{dès que } p, q \geq N.$$

D'où, $\left(\sum_{i\in I} \|T_p e_i - Te_i\|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon$ pour tout $p \geq N$. Ceci prouve que $T_p - T$, et donc aussi T, est de Hilbert-Schmidt et que la suite (T_n) converge vers T pour la norme $\|.\|_2$. □

Proposition 4.2.6. *Les assertions suivantes sont satisfaites :*

(i) $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{C}_2(H)$.

(ii) $\mathcal{F}(H)$ *est dense dans* $(\mathcal{C}_2(H), \|.\|_2)$.

(iii) $\mathcal{C}_2(H) \subseteq \mathcal{K}(H)$.

Preuve. (i) Découle immédiatement du fait que $\mathcal{C}_2(H)$ est un espace vectoriel contenant les opérateurs bornés de rang 1 et le fait que tout opérateur de rang fini est somme d'opérateurs de rang 1.

(ii) Soient $T \in \mathcal{C}_2(H)$, $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H et $\varepsilon > 0$. Comme la famille $(\|Te_i\|^2)_{i\in I}$ est sommable, il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $\sum_{i\in I\setminus J} \|Te_i\|^2 \leq \varepsilon$. Considérons l'opérateur de rang fini $T_J = \sum_{i\in J} Te_i \otimes e_i$. Il vient que

$$\left\|T - T_J\right\|_2^2 = \sum_{i\in I\setminus J} \|Te_i\|^2 \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que $\mathcal{F}(H)$ est dense dans $\mathcal{C}_2(H)$ pour la norme $\|.\|_2$.

(iii) On a $\mathcal{C}_2(H) = \overline{\mathcal{F}(H)}^{\|.\|_2} \subseteq \overline{\mathcal{F}(H)}^{\|.\|} \subseteq \mathcal{K}(H)$. □

Proposition 4.2.7. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur compact, alors*

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)^2\right)^{1/2}.$$

En particulier, T est de Hilbert-Schmidt si, et seulement si, $(\mu_n(T))_n \in \ell_2(\mathbb{N})$.

Preuve. Écrivons $T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) f_n \otimes e_n$ où $(f_n)_{n\geq 1}$ est une famille orthonormale de H et $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base orthonormale de $\mathrm{N}(T)^\perp$ que l'on complète en une base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ de H par une base orthonormale de $\mathrm{N}(T)$. Il vient donc

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{i\in I} \|Te_i\|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)^2\right)^{1/2}.$$

D'où le résultat. □

Proposition 4.2.8. *Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$, alors*

$$\|TS\|_2 \leq \|T\| \, \|S\|_2 \quad \text{et} \quad \|TS\|_2 \leq \|T\|_2 \, \|S\|.$$

En particulier, $\mathcal{C}_2(H)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{B}(H)$.

Preuve. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H. On a

$$\|TS\|_2 = \left(\sum_{i\in I}\|TSe_i\|^2\right)^{1/2} \leq \|T\|\left(\sum_{i\in I}\|Se_i\|^2\right)^{1/2} = \|T\|\,\|S\|_2\,,$$

et

$$\|TS\|_2 = \|S^*T^*\|_2 \leq \|S^*\|\,\|T^*\|_2 = \|T\|_2\,\|S\|.$$

□

4.3 Opérateurs de classe trace

Soient $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H et $T \in \mathcal{B}(H)$. On a

$$\sum_{i\in I}\langle |T|e_i, e_i\rangle = \sum_{i\in I}\langle |T|^{1/2}e_i, |T|^{1/2}e_i\rangle = \sum_{i\in I}\||T|^{1/2}e_i\|^2 = \left\||T|^{1/2}\right\|_2^2. \tag{4.1}$$

Donc, la quantité $\sum_{i\in I}\langle |T|e_i, e_i\rangle$ ne dépend pas du choix d'une base hilbertienne de H. On pose alors

$$\|T\|_1 = \sum_{i\in I}\langle |T|e_i, e_i\rangle.$$

Définition 4.3.1. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est de *classe trace*, ou *nucléaire*, si la quantité $\|T\|_1$ est finie.

On note par $\mathcal{C}_1(H)$ l'ensemble de tous les opérateurs de classe trace dans $\mathcal{B}(H)$.

Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. D'après (4.1), on a $\|T\|_1 = \left\||T|^{1/2}\right\|_2^2$, et donc

$$T \in \mathcal{C}_1(H) \quad \Leftrightarrow \quad |T|^{1/2} \in \mathcal{C}_2(H).$$

Il en résulte que

$$\mathcal{C}_1(H) \subseteq \mathcal{C}_2(H) \subseteq \mathcal{K}(H).$$

En effet, si $T \in \mathcal{C}_1(H)$, alors $|T|^{1/2} \in \mathcal{C}_2(H)$. Mais, d'après une décomposition polaire $T = U|T| = U|T|^{1/2}|T|^{1/2}$ et du fait que $\mathcal{C}_2(H)$ est un idéal bilatère, on trouve que $T \in \mathcal{C}_2(H)$.

Exemple 4.3.2. Soient $F = x \otimes y$ un opérateur de rang 1, alors $\|F\|_1 = \|F\| = \|x\|\|y\|$. En effet, Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H. Comme $|F| = \frac{\|x\|}{\|y\|}y \otimes y$, alors

$$\|F\|_1 = \sum_{i\in I}\langle |F|e_i, e_i\rangle = \sum_{i\in I}\frac{\|x\|}{\|y\|}\langle\langle e_i, y\rangle y, e_i\rangle = \frac{\|x\|}{\|y\|}\sum_{i\in I}|\langle e_i, y\rangle|^2 = \|x\|\|y\| = \|F\|.$$

Dans toute la suite, on note par $\Omega(H)$ la collection de toutes les bases hilbertiennes de H.

Proposition 4.3.3. *Pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$ on a*

$$\|T\|_1 = \sup_{u,v \in \Omega(H)} \sum_i |\langle Tu_i, v_i\rangle|.$$

De plus, si T est de classe trace alors

$$\|T\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T).$$

Preuve. Supposons $\|T\|_1 < \infty$. Alors T est compact, et donc

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) f_n \otimes e_n \quad \text{et} \quad |T| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) e_n \otimes e_n,$$

où $(f_n)_{n\geq 1}$ est une famille orthonormale que l'on complète en une base hilbertienne $(f_i)_i$ de H, et $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base orthonormale de $\mathrm{N}(T)^\perp = \mathrm{N}(|T|)^\perp$ que l'on complète en une base hilbertienne $(e_i)_i$ de H par une base orthonormale de $\mathrm{N}(|T|)$. Il vient que

$$\|T\|_1 = \sum_i \langle |T|e_i, e_i\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle |T|e_n, e_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T).$$

Soient $u = (u_i)_i$ et $v = (v_i)_i$ deux bases hilbertiennes de H. On a

$$\langle Tu_i, v_i\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) \langle u_i, e_n\rangle \langle f_n, v_i\rangle,$$

et donc

$$\sum_i |\langle Tu_i, v_i\rangle| \leq \sum_i \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) |\langle u_i, e_n\rangle| |\langle f_n, v_i\rangle|.$$

Comme

$$\sum_i |\langle u_i, e_n\rangle| |\langle f_n, v_i\rangle| \leq \left(\sum_i |\langle u_i, e_n\rangle|^2\right)^{1/2} \left(\sum_i |\langle f_n, v_i\rangle|^2\right)^{1/2} = \|e_n\| \|f_n\| = 1,$$

alors

$$\sum_i |\langle Tu_i, v_i\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) < \infty.$$

D'où, $\sup_{u,v\in\Omega(H)}\sum_i |\langle Tu_i, v_i\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(T)$. D'autre part, on a

$$\|T\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(T) = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle Te_n, f_n\rangle| \leq \sum_i |\langle Te_i, f_i\rangle| \leq \sup_{u,v\in\Omega(H)}\sum_i |\langle Tu_i, v_i\rangle|.$$

D'où l'égalité.

Supposons que $\sup_{u,v\in\Omega(H)}\sum_i |\langle Tu_i, v_i\rangle| < \infty$. En particulier, pour toutes familles orthonormales $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$, on a $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle Tu_n, v_n\rangle| < \infty$, et donc $\lim_{n\to+\infty}|\langle Tu_n, v_n\rangle| = 0$. Cela implique que T est compact. D'après ce qui précède, on trouve

$$\begin{aligned} T \text{ est compact } &\Rightarrow \|T\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(T) \leq \sup_{u,v\in\Omega(H)}\sum_i |\langle Tu_i, v_i\rangle| \\ &\Rightarrow \|T\|_1 < \infty \\ &\Rightarrow \sup_{u,v\in\Omega(H)}\sum_i |\langle Tu_i, v_i\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(T). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Corollaire 4.3.4. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$, alors*

(i) $\|T\|_1 = \|T^*\|_1 = \||T|\|_1$. *En particulier,*

$$T \in \mathcal{C}_1(H) \quad \Leftrightarrow \quad T^* \in \mathcal{C}_1(H) \quad \Leftrightarrow \quad |T| \in \mathcal{C}_1(H).$$

(ii) $\|T\| \leq \|T\|_1$.

Preuve. (i) On a

$$\|T\|_1 = \sup_{u,v\in\Omega(H)}\sum_i |\langle Tu_i, v_i\rangle| = \sup_{u,v\in\Omega(H)}\sum_i |\langle u_i, T^*v_i\rangle| = \|T^*\|_1\,,$$

et pour une certaine base hilbertienne $(e_i)_i$ de H

$$\|T\|_1 = \sum_i \langle |T|e_i, e_i\rangle = \sum_i \langle |(|T|)|e_i, e_i\rangle = \||T|\|_1\,.$$

(ii) Sans perte de généralité, on peut supposer que $\|T\|_1 < \infty$. Il en résulte que T est compact, et donc $T = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(T) f_n \otimes e_n$. D'où,

$$\|T\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|\mu_n(T) f_n \otimes e_n\| = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(T) = \|T\|_1\,.$$

□

Proposition 4.3.5. $(\mathcal{C}_1(H), \|.\|_1)$ *est un espace de Banach.*

Preuve. D'après la proposition précédente, $\mathcal{C}_2(H)$ est un espace normé. Soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}_1(H)$. Comme $\|.\|_1$ est plus fine que $\|.\|$, alors elle est de Cauchy aussi dans $\mathcal{B}(H)$, et donc elle converge vers un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|T_p - T_q\right\|_1 = \sup_{u,v \in \Omega(H)} \sum_i \left|\langle (T_p - T_q)u_i, v_i\rangle\right| \leq \varepsilon \quad \forall p, q \geq N.$$

En particulier, pour toute partie finie d'indices J, on a $\sum_J \left|\langle (T_p - T_q)u_i, v_i\rangle\right| \leq \varepsilon$, et donc $\sum_J \left|\langle (T_p - T)u_i, v_i\rangle\right| \leq \varepsilon$ pour tout $p \geq N$. D'où, $\sum_i \left|\langle (T_p - T)u_i, v_i\rangle\right| \leq \varepsilon$, et par suite $\left\|T_p - T\right\|_1 \leq \varepsilon$ pour tout $p \geq N$. Ceci affirme que $T_p - T$, et donc aussi T, est de classe trace et que la suite $(T_n)_n$ converge vers T pour la norme $\|.\|_1$. □

Proposition 4.3.6. *On a* $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{C}_1(H)$ *et* $\overline{\mathcal{F}(H)}^{\|.\|_1} = \mathcal{C}_1(H)$.

Preuve. L'inclusion $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{C}_1(H)$ découle immédiatement du fait que $\mathcal{C}_1(H)$ est un espace vectoriel contenant les opérateurs bornés de rang 1 et le fait que tout opérateur de rang fini est somme d'opérateurs de rang 1.

Montrons que $\overline{\mathcal{F}(H)}^{\|.\|_1} = \mathcal{C}_1(H)$. Soit $T \in \mathcal{C}_1(H)$, et écrivons $T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) f_n \otimes e_n$. Si l'on considère la suite d'opérateurs de rang fini $T_p = \sum_{n=1}^{p} \mu_n(T) f_n \otimes e_n$, on trouve que

$$\left\|T - T_p\right\|_1 = \left\|\sum_{n \geq p+1} \mu_n(T) f_n \otimes e_n\right\|_1 \leq \sum_{n \geq p+1} \mu_n(T) \to_{p+\infty} 0.$$

Cela prouve que $\mathcal{F}(H)$ est dense dans $\mathcal{C}_1(H)$ pour la norme $\|.\|_1$. □

Proposition 4.3.7. *Soient* $T, S \in \mathcal{B}(H)$*, alors*

$$\|TS\|_1 \leq \|T\| \, \|S\|_1 \quad \text{et} \quad \|TS\|_1 \leq \|T\|_1 \, \|S\|.$$

En particulier, $\mathcal{C}_1(H)$ *est un idéal bilatère de* $\mathcal{B}(H)$.

Preuve. Soit $(e_i)_i$ une base hilbertienne de H. Considérons des décompositions polaires

$S = U|S|$ et $TS = W|TS|$. Comme $|TS| = W^*TS = W^*TU|S|$, alors

$$\begin{aligned} \|TS\|_1 &= \sum_i \langle |TS|e_i, e_i\rangle = \sum_i \langle |S|^{1/2}e_i, |S|^{1/2}U^*T^*We_i\rangle \\ &\le \sum_i \||S|^{1/2}e_i\|.\||S|^{1/2}U^*T^*We_i\| \le \left\||S|^{1/2}\right\|_2 . \left\||S|^{1/2}U^*T^*W\right\|_2 \\ &\le \left\||S|^{1/2}\right\|_2^2 .\|U^*T^*W\| \le \|S\|_1 \|T\|. \end{aligned}$$

Par dualité, on trouve l'autre inégalité. □

Proposition 4.3.8. *On a* $C_1(H) = C_2(H).C_2(H)$.

Preuve. Soit $T \in C_1(H)$, alors $|T|^{1/2} \in C_2(H)$ et comme $T = U|T|^{1/2}|T|^{1/2}$ par une décomposition polaire, on obtient facilement que $T \in C_2(H).C_2(H)$.

Réciproquement, soient $A, B \in C_2(H)$. Pour toutes bases hilbertiennes $(u_i)_i$ et $(v_i)_i$ de H, on a

$$\sum_i |\langle ABu_i, v_i\rangle| = \sum_i |\langle Bu_i, A^*v_i\rangle| \le \sum_i \|Bu_i\|\|A^*v_i\| \le \|B\|_2 \|A^*\|_2 .$$

D'où, $AB \in C_1(H)$. □

4.4 Trace d'un opérateur de classe trace

Soient $T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) f_n \otimes e_n$ un opérateur de classe trace et $(u_i)_i$ une base hilbertienne de H. Comme les familles $(\langle Tu_i, u_i\rangle)_i$ et $(\langle f_n, u_i\rangle\langle u_i, e_n\rangle)_i$ sont absolument sommables, alors

$$\sum_i \langle Tu_i, u_i\rangle = \sum_i \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)\langle f_n, u_i\rangle\langle u_i, e_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) \sum_i \langle f_n, u_i\rangle\langle u_i, e_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)\langle f_n, e_n\rangle.$$

D'où, la quantité $\sum_i \langle Tu_i, u_i\rangle$ ne dépend pas du choix d'une base hilbertienne de H.

Définition 4.4.1. On définit la *trace* d'un opérateur de classe trace $T \in C_1(H)$ par

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_i \langle Tu_i, u_i\rangle.$$

Notons que cette définition coïncide avec la définition usuelle de la trace en dimension finie.

Exemple 4.4.2. Soient $F = x \otimes y$ un opérateur de rang 1 et $(e_i)_i$ une base hilbertienne de H. On a

$$\operatorname{tr}(F) = \sum_i \langle Fe_i, e_i\rangle = \sum_i \langle\langle e_i, y\rangle x, e_i\rangle = \sum_i \langle e_i, y\rangle\langle x, e_i\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Théorème 4.4.3. *La trace* $\operatorname{tr} : C_1(H) \to \mathbb{C}$ *est une forme linéaire bornée de norme* 1 *vérifiant* $\operatorname{tr}(T^*) = \overline{\operatorname{tr}(T)}$ *pour tout* $T \in C_1(H)$.

Preuve. Il évident que tr est linéaire. Soient $T \in C_1(H)$ et $(u_i)_i$ une base hilbertienne de H, on a

$$|\operatorname{tr}(T)| \leq \sum_i |\langle Tu_i, u_i\rangle| \leq \|T\|_1 .$$

D'où, tr est bornée et $\|\operatorname{tr}\| \leq 1$. Considérons une projection orthogonale $P = e \otimes e$ de rang 1 ; on a

$$1 = |\operatorname{tr}(P)| \leq \|\operatorname{tr}\| \, \|P\|_1 \leq \|\operatorname{tr}\|,$$

d'où $\|\operatorname{tr}\| = 1$.

Par une décomposition convenable $T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) f_n \otimes e_n$, on a

$$\operatorname{tr}(T^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)\langle e_n, f_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T)\overline{\langle f_n, e_n\rangle} = \overline{\operatorname{tr}(T)}.$$

□

Corollaire 4.4.4. *La norme de Hilbert-Schmidt* $\|.\|_2$ *est associée au produit scalaire* $\langle ., .\rangle$ *sur* $C_2(H)$ *défini par* $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^*A)$ *pour tous* $A, B \in C_2(H)$.

Par conséquent, $C_2(H)$ *est un espace de Hilbert.*

Preuve. Comme la trace est linéaire, alors $\langle ., .\rangle$ est linéaire par rapport à la première variable et anti-linéaire par rapport à la deuxième. De plus, pour tous $A, B \in C_2(H)$, on a

$$\overline{\langle A, B\rangle} = \overline{\operatorname{tr}(B^*A)} = \operatorname{tr}((B^*A)^*) = \operatorname{tr}(A^*B) = \langle B, A\rangle,$$

et

$$\langle A, A\rangle = \operatorname{tr}(A^*A) = \|A\|_2^2 .$$

D'où le résultat. □

Dans l'espace de Hilbert $C_2(H)$, l'identité de polarisation s'écrit

$$\langle A, B\rangle = \frac{1}{4}\left(\|A + B\|_2^2 - \|A - B\|_2^2 + \mathrm{i}\,\|A + \mathrm{i}B\|_2^2 - \|A - \mathrm{i}B\|_2^2\right).$$

On en déduit que

$$\operatorname{tr}(B^*A) = \overline{\operatorname{tr}(BA^*)} \quad \text{pour tous } A, B \in \mathcal{C}_2(H).$$

Corollaire 4.4.5. *Soient $T \in \mathcal{C}_1(H)$ et $S \in \mathcal{B}(H)$, alors*

$$\operatorname{tr}(TS) = \operatorname{tr}(ST).$$

Preuve. Comme $\mathcal{C}_1(H) = \mathcal{C}_2(H)\mathcal{C}_2(H)$, il existe $A, B \in \mathcal{C}_2(H)$ tels que $T = AB$. Il vient que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(TS) &= \operatorname{tr}(A(BS)) = \overline{\operatorname{tr}(A^*(S^*B^*))} \\ &= \overline{\operatorname{tr}((SA)^*B^*)} = \operatorname{tr}(SAB) \\ &= \operatorname{tr}(ST). \end{aligned}$$

□

Lemme 4.4.6. *Soient $(x_n)_{1 \le n \le p}$ et $(y_n)_{1 \le n \le p}$ deux familles orthonormales. Alors*

$$\| \sum_{n=1}^{p} x_n \otimes y_n \| = 1.$$

Preuve. Posons $F = \sum_{n=1}^{p} x_n \otimes y_n$. Soit $x \in H$, On a

$$\|Fx\|^2 = \sum_{n=1}^{p} |\langle x, y_n \rangle|^2 \le \|x\|^2,$$

et par suite $\|F\| \le 1$. Mais $1 = \|x_1\| = \|Fy_1\| \le \|F\|$, et donc $\|F\| = 1$. □

Proposition 4.4.7. *Soit $T \in \mathcal{C}_1(H)$, alors l'application $\Phi_T : \mathcal{K}(H) \to \mathbb{C}$ définie par $\Phi_T(S) = \operatorname{tr}(ST)$ est une forme linéaire bornée et $\|\Phi_T\| = \|T\|_1$.*

Preuve. La linéarité de Φ_T découle de celle de la trace. Quant à la continuité, on a pour tout $S \in \mathcal{K}(H)$

$$|\Phi_T(S)| = |\operatorname{tr}(ST)| \le \|ST\|_1 \le \|S\| \, \|T\|_1 \, ,$$

et donc Φ_T est borné et $\|\Phi_T\| \le \|T\|_1$.

Écrivons $T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) f_n \otimes e_n$ et prenons $T_m = \sum_{n=1}^{m} e_n \otimes f_n$. D'après le lemme précédent, on a $\|T_m\| = 1$. De plus, on a $T_m T = \sum_{n=1}^{m} \mu_n(T) e_n \otimes e_n$, et par suite

$$\Phi_T(T_m) = \operatorname{tr}(T_m T) = \sum_{n=1}^{m} \mu_n(T) \le \|\Phi_T\|.$$

Par passage à la limite, on trouve que $\|T\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(T) \leq \|\Phi_T\|$. D'où l'égalité. $\square$

Corollaire 4.4.8. *Soit $T \in C_1(H)$, on a*

$$\begin{aligned}\|T\|_1 &= \sup\{|\mathrm{tr}(ST)| : S \in \mathcal{F}(H), \|S\| \leq 1\}\\ &= \sup\{|\mathrm{tr}(ST)| : S \in \mathcal{K}(H), \|S\| \leq 1\}\\ &= \sup\{|\mathrm{tr}(ST)| : S \in \mathcal{B}(H), \|S\| \leq 1\}.\end{aligned}$$

Théorème 4.4.9. *L'application $\Phi : C_1(H) \to \mathcal{K}(H)^*$ définie par $\Phi(T) = \Phi_T$ est un isomorphisme isométrique.*

Preuve. Clairement, Φ est linéaire et, d'après la proposition précédente, on a $\|\phi(T)\| = \|T\|_1$ pour tout $T \in C_1(H)$.

Il reste à monter que Φ est surjective. Soit $\psi \in \mathcal{K}(H)^*$, alors l'application $(x, y) \in H^2 \mapsto \psi(x \otimes y)$ est une forme sesquilinéaire bornée, et donc il existe $A \in \mathcal{B}(H)$ unique tel que

$$\psi(x \otimes y) = \langle x, Ay\rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Soient $(u_i)_i$ et $(v_i)_i$ deux bases hilbertiennes de H. Quitte à remplacer u_i par $\frac{|\langle u_i, Av_i\rangle|}{\langle u_i, Av_i\rangle} u_i$ lorsque $\langle u_i, Av_i\rangle \notin \mathbb{R}^+$, on peut supposer que $\langle u_i, Av_i\rangle \geq 0$ pour tout i. Donc, pour toute partie finie d'indices J, on a

$$\psi(\sum_{i \in J} u_i \otimes v_i) = \sum_{i \in J} \langle u_i, Av_i\rangle \leq \|\psi\|.$$

D'où, la famille $(\langle u_i, Av_i\rangle)_i$ est sommable et $\sum_i \langle u_i, Av_i\rangle \leq \|\psi\|$. Par suite, l'opérateur A, et donc aussi A^*, est de classe trace et $\|A\|_1 = \|A^*\|_1 \leq \|\psi\|$.

Maintenant, pour tous $x, y \in H$, on a

$$\Phi_{A^*}(x \otimes y) = \mathrm{tr}(x \otimes Ay) = \langle x, Ay\rangle = \psi(x \otimes y),$$

et donc par continuité et densité de $\mathcal{F}(H)$ dans $\mathcal{K}(H)$, on trouve que $\Phi(A^*) = \psi$. $\square$

Théorème 4.4.10. *L'application $\varphi : \mathcal{B}(H) \to (C_1(H), \|.\|_1)^*$ définie par $\varphi(T) = \varphi_T$, où $\varphi_T(S) = \mathrm{tr}(ST)$, est un isomorphisme isométrique.*

Preuve. L'application φ est linéaire, et on a, pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$,

$$|\mathrm{tr}(ST)| \leq \|ST\|_1 \leq \|S\|_1 \|T\| \quad \forall S \in C_1(H).$$

Donc $\|\varphi_T\| \leq \|T\|$. Soient $x \in H$ non nul et $A = T^*x \otimes x$, on a

$$\frac{|\mathrm{tr}(AT)|}{\|A\|_1} = \frac{\|T^*x\|^2}{\|T^*x\|.\|x\|} = \frac{\|T^*x\|}{\|x\|} \leq \|\varphi_T\|.$$

Il en résulte que $\|T^*\| = \|T\| \leq \|\varphi_T\|$. D'où l'égalité.

Il reste à monter que φ est surjective. Soit $f \in (\mathcal{C}_1(H), \|.\|_1)^*$, alors l'application $(x, y) \in H^2 \mapsto f(x \otimes y)$ est une forme sesquilinéaire bornée, et donc il existe $A \in \mathcal{B}(H)$ unique tel que

$$f(x \otimes y) =< x, Ay > \quad \forall x, y \in H.$$

Pour tous $x, y \in H$ on a

$$\varphi_{A^*}(x \otimes y) = \mathrm{tr}(x \otimes Ay) = \langle x, Ay \rangle = f(x \otimes y),$$

donc par continuité et densité de $\mathcal{F}(H)$ dans $(\mathcal{C}_1(H), \|.\|_1)$, on trouve que $\varphi(A^*) = f$. $\square$

Bibliographie

[1] B. Aupetit, *A Primer on Spectral Theory*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[2] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[3] S. Grabiner and J. Zemánek, *Ascent, descent, and ergodic properties of linear operators*, J. Operator Theory **48** (2002), 69-81.

[4] K. B. Laursen and M. M. Neumann, *An Introduction to Local Spectral Theory*, Oxford University Press, New York, 2000.

[5] V. Müller, *Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras*. Second edition. Operator Theory : Advances and Applications, **139**. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[6] A. E. Taylor and D. C. Lay, *Introduction to Functional Analysis*, Wiley, New York-Chichester-Brisbane, 1980.