Université Mohammed Premier
Faculté des Sciences d'Oujda
Département de Mathématiques

Master Analyse Fonctionnelle
Semestre 2
2018-2019

Module : *Théorie des opérateurs*
Série N° 1

Exercice 1. Soient M un sous-espace fermé de X, $\pi : X \to X/M$ la surjection canonique et $S \in \mathcal{B}(X/M, Y)$.

(1) Montrer que π est borné et que $\|\pi\| \leq 1$.

(2) Montrer que $\|S \circ \pi\| = \|S\|$.

(3) Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tel que $M \subseteq \mathrm{N}(T)$, et considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \tilde{T}: & X/M & \longrightarrow & \mathrm{R}(T) \\ & x+M & \longmapsto & Tx \end{array}$$

(a) Montrer que $\tilde{T}$ est une application bien définie, linéaire et surjective.

(b) Montrer que $\tilde{T}$ est borné de norme $\|T\|$.

(c) Montrer $\tilde{T}$ est injective si, et seulement si, $M = \mathrm{N}(T)$.

Exercice 2. Soit M un sous-espace fermé de X. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) M possède un supplémentaire topologique ;

(ii) Il existe une projection $P \in \mathcal{B}(X)$ (i.e. $P^2 = P$) telle que $\mathrm{R}(P) = M$;

(iii) Il existe une projection $Q \in \mathcal{B}(X)$ telle que $\mathrm{N}(Q) = M$.

Exercice 3. Soit $T : X \to Y$ une application linéaire.

(1) Montrer que T est borné si, et seulement si, $f \circ T \in X^*$ pour tout $f \in X^*$.

(2) Montrer que T est borné si, et seulement s'il existe $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$ injectif tel que ST soit borné.

(3) On suppose que $\mathrm{N}(T)$ est fermé et possède un supplémentaire topologique M sur lequel T est borné. Montrer que T est borné.

Exercice 4. Soient $f, f_1, \ldots, f_n \in X^*$ et $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

(1) Montrer que

$$f \in \mathrm{Span}\{f_1, \ldots, f_n\} \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{N}(f_i) \subseteq \mathrm{N}(f).$$

(2) Montrer que la famille $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est libre si, et seulement s'il existe des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ dans X tels que

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} \text{ pour tous } 1 \leq i, j \leq n.$$

(3) Montrer que $\dim \mathrm{R}(T) = n$ si, et seulement s'il existe deux familles libres $\{y_1, \ldots, y_n\}$ dans Y et $\{h_1, \ldots, h_n\}$ dans X^* telles que

$$T = y_1 \otimes h_1 + \cdots + y_n \otimes h_n.$$

Exercice 5. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{R}(T)$ est fermée ;

(ii) L'application linéaire induite $\tilde{T} : X/\mathrm{N}(T) \to \mathrm{R}(T)$ est un isomorphisme ;

(iii) Pour toute suite $(x_n)_n$ de X telle que $Tx_n \to 0$, on a $\mathrm{dist}(x_n, \mathrm{N}(T)) \to 0$;

(iv) $\tilde{T}^{-1}$ est continue.

Exercice 6. Soit $X = \mathcal{C}([0,1]$ l'espace de Banach complexe muni de la norme $\|.\|_\infty$. On considère l'application linéaire $T : X \to X$ définie par $(Tf)(t) = tf(t)$ pour tous $f \in X$ et $t \in [0,1]$.

(1) Montrer que T est un opérateur borné et calculer sa norme.

(2) Calculer le spectre ponctuel de T.

(3) Calculer le spectre de T.

Exercice 7. Soient X_i, $1 \leq i \leq 2$, deux sous-espaces fermés de X tels que $X = X_1 \oplus X_2$, et $T_i \in \mathcal{B}(X_i)$, $1 \leq i \leq 2$. Notons par $T = T_1 \oplus T_2$ l'application linéaire sur X définie par $T(x_1 + x_2) = T_1x_1 + T_2x_2$ pour tous $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.

(1) Montrer que T est borné.

(2) Calculer $\mathrm{N}(T)$ et $\mathrm{R}(T)$ en fonction de ceux de T_1 et T_2.

(3) Montrer que T est un injectif à image fermée si, et seulement si, T_1 et T_2 le sont.

(4) Montrer que T est surjectif si, et seulement si, T_1 et T_2 le sont.

Exercice 8. Soient $T \in \mathcal{B}(X)$ et X_i, $1 \leq i \leq 2$, deux sous-espaces T-invariants et fermés de X tels que $X = X_1 \oplus X_2$. Notons par $T_i = T_{|X_i}$.

(1) Montrer que $\mathrm{a}(T) = \max\{\mathrm{a}(T_1), \mathrm{a}(T_2)\}$ et $\mathrm{d}(T) = \max\{\mathrm{d}(T_1), \mathrm{d}(T_2)\}$.

(2) On suppose que T_1 est quasi-nilpotent et T_2 est inversible. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $T - \lambda$ soit inversible pour tout $0 < |\lambda| < \varepsilon$.

(3) On suppose que T n'est pas inversible et qu'il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ vérifiant $ST = TS$ et $ST^2 = T$. Montrer que $\mathrm{a}(T) = \mathrm{d}(T) = 1$ et que 0 est isolé dans $\sigma(T)$.

(4) On suppose que $\dim X > 2$. Donner un exemple de deux opérateurs $A, B \in \mathcal{B}(X)$ vérifiant $\mathrm{a}(A) = \mathrm{a}(B) = 2$ et $\mathrm{a}(A + B) = 0$.

Exercice 9. Considérons l'application linéaire $\Phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$ définie par $\Phi(T) = AT^*B$ où $A : X^* \to X$ et $B : X \to X^*$ sont deux isomorphismes.

(1) Vérifier que Φ est bornée et injective.

(2) Montrer que $JT = T^{**}J$ pour tout $T \in \mathcal{B}(X)$, où J est l'isométrie canonique de X dans X^{**}.

(3) Montrer que si Φ est surjective, alors X est réflexif.

(4) On suppose que $\sigma(\Phi(T)) = \sigma(T)$ pour tout compact $T \in \mathcal{B}(X)$. Montrer que $B = A^{-1}$.

Exercice 10. Soient $K \in \mathcal{K}(X)$ d'ascente et de descente finies $n \geq 1$ et $T = I - K$.

(1) Montrer que, pour tout $S \in \mathcal{B}(X)$, on a

$$TS = I \quad \Leftrightarrow \quad ST = I.$$

(2) Montrer que $\dim \mathrm{N}(K^n) = \infty$.

(3) Montrer qu'il existe un opérateur nilpotent $N \in \mathcal{B}(X)$ et un opérateur de rang fini $F \in \mathcal{B}(X)$ tels que $K = N + F$ et $NF = FN = 0$.