Université Mohammed Premier
Faculté des Sciences d'Oujda
Département de Mathématiques

Master Analyse Fonctionnelle
Semestre 2
2018-2019

Module : *Théorie des opérateurs*
Série N° 2

Exercice 1. Soient $T \in \mathcal{B}(X)$ non nul et $K \in \mathcal{K}(X)$. Soit $\lambda_0 \in \sigma(T) \setminus \sigma(T+K)$ et posons $S = (T + K - \lambda_0)^{-1}$.

(1) Montrer que $\mathrm{N}(T - \lambda_0) = \mathrm{N}(I - SK)$.

(2) En déduire que λ_0 est une valeur propre de T.

(3) Montrer que

$$\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \cup \left[\cap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma(T+K)\right].$$

Exercice 2. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur non nul.

(1) Montrer que T est normal si, et seulement si,

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle T^*x, T^*y \rangle \text{ pour tous } x, y \in H.$$

(2) On suppose que T est normal. Montrer que $\|T^n\| = \|T\|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) En déduire que si T est normal et $T^2 = -T$, alors $\|T\| = 1$ et $-T$ est une projection orthogonale.

Exercice 3. Soient $\{e_n\}_{n \geq 1}$ une base hilbertienne de H, $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal, et $S \in \mathcal{B}(H)$ l'opérateur donné par $Se_{2k+1} = e_{2k+2}$ et $Se_{2k+2} = 0$ pour tout $k \geq 0$.

(1) Montrer que $\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|$ pour tout $x \in H$.

(2) Montrer que T est compact si, et seulement si, T^2 est compact.

(3) Calculer S^*e_n pour tout $n \geq 1$.

(4) Montrer que S n'est pas compact.

(5) Est-ce que S est normal ?

Exercice 4. Soient $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur vérifiant $\|T\| \leq 1$ et x_0 un vecteur non nul vérifiant $Tx_0 = x_0$.

(1) Vérifier que $I - T^*T$ est un opérateur positif.

(2) Montrer que $\|T^*x_0\| = \|x_0\|$. En déduire que $T^*x_0 = x_0$.

(3) Montrer que $H = \mathrm{N}(T - I) \oplus \overline{\mathrm{R}(T - I)}$ où la somme directe est orthogonale.

Exercice 5. Soient $\{e_n\}_{n \geq 0}$ une base hilbertienne de H, $U \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur unitaire et $S \in \mathcal{B}(H)$ l'opérateur shift unilatéral à droite associé à $\{e_n\}_{n \geq 0}$.

(1) Vérifier que S est une isométrie.

(2) Calculer $\mathrm{dist}(S, \mathcal{F}(H))$.

(3) Montrer que $\{Ue_n\}_{n \geq 0}$ une base hilbertienne de H.

(4) Déduire que USU^* est un opérateur shift unilatéral à droite.

Exercice 6. Supposons que H est séparable, et soit $T \in \mathcal{B}(H)$.

(1) Montrer que si H_1 et H_2 sont deux sous-espaces fermés de H tels que $\dim H_1 \leq \dim H_2$, alors il existe une isométrie $A : H_1 \to H_2$.

(2) Montrer que si $\dim \mathrm{N}(T) \leq \dim \mathrm{N}(T^*)$, alors il existe une isométrie $W \in \mathcal{B}(H)$ telle que $T = W|T|$.

(3) Montrer que si $\dim \mathrm{N}(T^*) \leq \dim \mathrm{N}(T)$, alors il existe une isométrie partielle $W \in \mathcal{B}(H)$ telle que W^* est une isométrie et $T = W|T|$.

(4) Montrer que l'ensemble $\mathrm{Inv_r}(H) \cup \mathrm{Inv_l}(H)$ est dense dans $\mathcal{B}(H)$.

Exercice 7. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint qui n'est pas de rang fini.

(1) Vérifier que $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est une valeur propre de T.

(2) Montrer que si M est un sous-espace fermé T-invariant, alors son orthogonal l'est aussi.

(3) Montrer que si e est un vecteur propre de T, alors $T_{|\mathrm{Span}\{e\}^\perp}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint qui n'est pas de rang fini.

(4) Montrer qu'il existe une suite orthonormale e_n, $n \geq 1$, de vecteurs propres de T correspondant à des valeurs propres λ_n non nuls tels que
$$\lambda_{k+1} = \pm\|T_{|\mathrm{Span}\{e_1,\dots,e_k\}^\perp}\| \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

(5) Montrer que $T = \sum_{n\geq 1} \lambda_n e_n \otimes e_n$.

Exercice 8. Soient $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur positif et $P \in \mathcal{B}(H)$ une projection orthogonale.

(1) Vérifier que PTP est un opérateur positif.

(2) Montrer que $\|T\|_1 = \|PTP\|_1$ lorsque $\mathrm{N}(T) = \mathrm{N}(P)$.

(3) Montrer que P est de classe trace si, et seulement s'il est de rang fini.

(4) On suppose que T est de classe trace. Montrer que $\mathrm{tr}(T) \geq 0$.

Exercice 9. Soient $\{e_i\}_i$ une base hilbertienne de H et $T : H \to H$ une application linéaire définie par la donné de Te_i tels que $\sum_i \|Te_i\| < \infty$.

(1) Montrer que T est borné et que $\|T\| \leq \sum_i \|Te_i\|$.

(2) Montrer que $|T|$ est de classe trace. En déduire que T est de classe trace.

(3) Considérons deux applications linéaires $A, B : H \to H$ définies par $Ae_i = \|Te_i\|^{-1/2} Te_i$ et $Be_i = \|Te_i\|^{1/2} e_i$.

   (a) Montrer que A et B sont bornés.

   (b) Montrer que A et B sont de Hilbert-Schmidt et que $T = AB$.