Module : *Théorie des opérateurs*
Série N° 1

Exercice 1. Soit $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ un opérateur borné. Pour tout $y \in \mathrm{R}(T)$, on pose

$$\|y\|_r = \inf\{\|x\| : Tx = y\}.$$

(1) Montrer que $\|.\|_r$ est une norme sur $\mathrm{R}(T)$.

(2) Vérifier que $T : X \to (\mathrm{R}(T), \|.\|_r)$ est un opérateur borné.

(3) Montrer que $(\mathrm{R}(T), \|.\|_r)$ est un espace de Banach.

Exercice 2. Soient M et N deux sous-espaces fermés de X.

(1) Montrer que $(M \cup N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$.

(2) Vérifier que $M + N \subseteq {}^\perp(M^\perp \cap N^\perp)$.

(3) Montrer que $M + N$ est fermé si, et seulement si, $M + N = {}^\perp(M^\perp \cap N^\perp)$.

Exercice 3. Soient $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ un opérateur à image fermée et $F = z \otimes f$ où $z \in X$ et $f \in X^*$.

(1) Montrer que $\mathrm{R}(T) + \mathrm{Vect}\{z\} = \pi^{-1}(\pi(\mathrm{Vect}\{z\}))$ où $\pi : X \to X/\mathrm{R}(T)$ est la surjection canonique.

(2) Déduire que $\mathrm{R}(T) + \mathrm{Vect}\{z\}$ est fermé.

(3) Vérifier que $\mathrm{R}(T+F) + \mathrm{R}(F) = \mathrm{R}(T) + \mathrm{Vect}\{z\}$.

(4) Déterminer $\mathrm{R}(T+F) \cap \mathrm{R}(F)$. En déduire que $\mathrm{R}(T+F)$ est fermé.

Exercice 4. Soit $X = \mathcal{C}([0,1]$ l'espace de Banach complexe muni de la norme $\|.\|_\infty$. On considère l'application linéaire $T : X \to X$ définie par $(Tf)(t) = tf(t)$ pour tous $f \in X$ et $t \in [0,1]$.

(1) Montrer que T est un opérateur borné et calculer sa norme.

(2) Calculer le spectre ponctuel de T.

(3) Calculer le spectre de T.

Exercice 5. Soit M un sous-espace fermé de X. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) M possède un supplémentaire topologique ;

(ii) Il existe une projection $P \in \mathcal{B}(X)$ (i.e. $P^2 = P$) telle que $\mathrm{R}(P) = M$;

Exercice 6. Soient X_i, $1 \leq i \leq 2$, deux sous-espaces fermés de X tels que $X = X_1 \oplus X_2$, et $T_i \in \mathcal{B}(X_i)$, $1 \leq i \leq 2$. Notons par $T = T_1 \oplus T_2$ l'application linéaire sur X définie par $T(x_1 + x_2) = T_1x_1 + T_2x_2$ pour tous $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.

(1) Montrer que T est borné.

(2) Calculer $\mathrm{N}(T)$ et $\mathrm{R}(T)$ en fonction de ceux de T_1 et T_2.

(3) Montrer que T est un injectif à image fermée si, et seulement si, T_1 et T_2 le sont.

(4) Montrer que T est surjectif si, et seulement si, T_1 et T_2 le sont.

Exercice 7. Soient $T \in \mathcal{B}(X)$ et X_i, $1 \leq i \leq 2$, deux sous-espaces T-invariants et fermés de X tels que $X = X_1 \oplus X_2$. Notons par $T_i = T_{|X_i}$.

(1) Montrer que $\mathrm{a}(T) = \max\{\mathrm{a}(T_1), \mathrm{a}(T_2)\}$ et $\mathrm{d}(T) = \max\{\mathrm{d}(T_1), \mathrm{d}(T_2)\}$.

(2) On suppose que T_1 est quasi-nilpotent et T_2 est inversible. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $T - \lambda$ soit inversible pour tout $0 < |\lambda| < \varepsilon$.

(3) On suppose que T n'est pas inversible et qu'il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ vérifiant $ST = TS$ et $ST^2 = T$. Montrer que $\mathrm{a}(T) = \mathrm{d}(T) = 1$ et que 0 est isolé dans $\sigma(T)$.

Exercice 8. Soient $K \in \mathcal{K}(X)$ d'ascente et de descente finies $n \geq 1$ et $T = I - K$.

(1) Montrer que, pour tout $S \in \mathcal{B}(X)$, on a
$$TS = I \quad \Leftrightarrow \quad ST = I.$$

(2) Montrer que $\mathrm{R}(K^n)$ est de dimension finie.

(3) Montrer qu'il existe un opérateur nilpotent $N \in \mathcal{B}(X)$ et un opérateur de rang fini $F \in \mathcal{B}(X)$ tels que $K = N + F$ et $NF = FN = 0$.

Exercice 9. Soient $T \in \mathcal{B}(X)$ non nul et $K \in \mathcal{K}(X)$. Soit $\lambda_0 \in \sigma(T) \setminus \sigma(T+K)$ et posons $S = (T + K - \lambda_0)^{-1}$.

(1) Montrer que $\mathrm{N}(T - \lambda_0) = \mathrm{N}(I - SK)$.

(2) En déduire que λ_0 est une valeur propre de T.

(3) Montrer que
$$\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \cup \left[\cap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma(T + K)\right].$$

Exercice 10. Soient $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur injectif à image fermée et $K \in \mathcal{K}(X)$.

(1) Montrer qu'il existe un sous-espace M fermé de codimension finie tel que $(T+K)_{|M}$ soit injectif à image fermée.

(2) En déduire que $\mathrm{R}(T + K)$ est fermée.