

Module : *Théorie des opérateurs*
Série N° 2

Exercice 1. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur non nul. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathcal{R}(T)$ est fermée ;
- (ii) il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{N}(T)^\perp$.

Exercice 2. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur non nul.

- (1) Montrer que T est normal si, et seulement si,

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle T^*x, T^*y \rangle \text{ pour tous } x, y \in H.$$

- (2) On suppose que T est normal. Montrer que $\|T^n\| = \|T\|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (3) En déduire que si T est normal et $T^2 = -T$, alors $\|T\| = 1$ et $-T$ est une projection orthogonale.

Exercice 3. Soient $\{e_n\}_{n \geq 1}$ une base hilbertienne de H , $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal, et $S \in \mathcal{B}(H)$ l'opérateur donné par $Se_{2k+1} = e_{2k+2}$ et $Se_{2k+2} = 0$ pour tout $k \geq 0$.

- (1) Montrer que $\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|$ pour tout $x \in H$.
- (2) Montrer que T est compact si, et seulement si, T^2 est compact.
- (3) Calculer S^*e_n pour tout $n \geq 1$.
- (4) Montrer que S n'est pas compact.
- (5) Est-ce que S est normal ?

Exercice 4. Soient $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur vérifiant $\|T\| \leq 1$ et x_0 un vecteur non nul vérifiant $Tx_0 = x_0$.

- (1) Vérifier que $I - T^*T$ est un opérateur positif.
- (2) Montrer que $\|T^*x_0\| = \|x_0\|$. En déduire que $T^*x_0 = x_0$.
- (3) Montrer que $H = \mathcal{N}(T - I) \oplus \overline{\mathcal{R}(T - I)}$ où la somme directe est orthogonale.

Exercice 5. Soient $\{e_n\}_{n \geq 0}$ une base hilbertienne de H , $U \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur unitaire et $S \in \mathcal{B}(H)$ l'opérateur shift unilatéral à droite associé à $\{e_n\}_{n \geq 0}$.

- (1) Vérifier que S est une isométrie.
- (2) Calculer $\text{dist}(S, \mathcal{F}(H))$.
- (3) Montrer que $\{Ue_n\}_{n \geq 0}$ une base hilbertienne de H .
- (4) Déduire que USU^* est un opérateur shift unilatéral à droite.

Exercice 6. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint qui n'est pas de rang fini.

- (1) Vérifier que $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est une valeur propre de T .
- (2) Montrer que si M est un sous-espace fermé T -invariant, alors son orthogonal l'est aussi.
- (3) Montrer que si e est un vecteur propre de T , alors $T|_{\text{Span}\{e\}^\perp}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint qui n'est pas de rang fini.

Exercice 7. Soient $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur positif et $P \in \mathcal{B}(H)$ une projection orthogonale.

- (1) Vérifier que PTP est un opérateur positif.
- (2) Montrer que $\|T\|_1 = \|PTP\|_1$ lorsque $N(T) = N(P)$.
- (3) Montrer que P est de classe trace si, et seulement s'il est de rang fini.
- (4) On suppose que T est de classe trace. Montrer que $\text{tr}(T) \geq 0$.

Exercice 8. Soient $\{e_i\}_i$ une base hilbertienne de H et $T : H \rightarrow H$ une application linéaire définie par la donnée de Te_i tels que $\sum_i \|Te_i\| < \infty$.

- (1) Montrer que T est borné et que $\|T\| \leq \sum_i \|Te_i\|$.
- (2) Montrer que $|T|$ est de classe trace. En déduire que T est de classe trace.
- (3) Considérons deux applications linéaires $A, B : H \rightarrow H$ définies par $Ae_i = \|Te_i\|^{-1/2}Te_i$ et $Be_i = \|Te_i\|^{1/2}e_i$.
 - (a) Montrer que A et B sont bornés.
 - (b) Montrer que A et B sont de Hilbert-Schmidt et que $T = AB$.