Université Mohammed Premier
Faculté des Sciences d'Oujda
Département de Mathématiques

Filière : SMIA - S3

2018-2019

Algèbre 4 : *Réduction des endomorphismes*
Série N° 1 : *Polynômes d'endomorphisme*

Exercice 1. Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorphisme vérifiant $T^2 = -T$ (où $T^2 = T \circ T$).

(1) Montrer que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T + \mathrm{I_d})$ et $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(T + \mathrm{I_d})$.

(2) Monter que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$. Que devient-il T lorsque $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.

(3) Soit S un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ commutant avec T. Montrer que $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$ sont invariants par S.

(4) On suppose que $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$ sont munis des bases $\{u_1\}$ et $\{u_2, u_3, u_4\}$, respectivement. Donner la matrice de T dans la base $\mathscr{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

Exercice 2. Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorphisme satisfaisant $T^3 = 0$ et $T^2 \neq 0$, et soit $x \in \mathbb{R}^4$ tel que $T^2 x \neq 0$.

(1) Montrer que la famille $\{x, Tx, T^2 x\}$ est libre, et en déduire que $1 \leq \dim \mathrm{Ker}(T) \leq 2$.

(2) Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(T^2) \oplus \mathrm{Vect}\{x\}$ dans $\mathrm{Ker}(T^3)$. Supposons qu'il existe un vecteur non nul $y \in G$. Monter que $\{x, Tx, T^2 x, y, Ty, T^2 y\}$ est libre. Que peut-on conclure ?

(3) Montrer que $\mathrm{Ker}(T^2) = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Vect}\{Tx\}$, et en déduire que $\dim \mathrm{Ker}(T) = 2$.

(4) Soit $\{T^2 x, z\}$ une base de $\mathrm{Ker}(T)$. Donner la matrice de T dans la base $\mathscr{B} = \{x, Tx, T^2 x, z\}$.

(5) Montrer que $T + \alpha \mathrm{I_d}$ est bijectif et calculer $(T + \alpha \mathrm{I_d})^{-1}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercice 3. Considérons H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^4$ de dimension 3 et u un vecteur non nul tels que $\mathbb{C}^4 = H \oplus \mathrm{Vect}\{u\}$. Soit $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ un endomorphisme différent de $\mathrm{I_d}$ et qui vérifie

$$(*) \qquad \mathrm{Im}(T - \mathrm{I_d}) \subseteq H \subseteq \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I_d}).$$

(1) Vérifier que $(T - \mathrm{I_d})^2 = 0$ et $\dim \mathrm{Im}(T - \mathrm{I_d}) = 1$. En déduire que $H = \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I_d})$ et $Te_n \neq e_n$.

(2) Montrer que T est bijectif et que T^{-1} vérifie $(*)$.

(3) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{C}^4$ dans la quelle la matrice de T est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer les valeurs propres de T, les sous-espaces propres associés et leurs dimension.

(2) Trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de T et donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(T)$.

Exercice 5. Soient E l'espace vectoriel des suites complexes et $T : E \to E$ l'application qui à $(u_n)_{n\geq 0}$ associe la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ donnée par

$$v_0 = u_0, \text{ et } v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

(1) Vérifier que T est linéaire, et déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

(2) Soit F le sous-espace vectoriel de E des suites nulles à partir d'un certain rang. Montrer que F est invariant par T et que le spectre de $T_{|F}$, la restriction de T à F, est vide.

Exercice 6. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $T \in \mathscr{L}(E)$ et F, G deux sous-espaces vectoriels non-réduits à $\{0\}$ et invariants par T tels que $E = F \oplus G$.

(1) Montrer que T est injectif (resp. surjectif) si, et seulement si, $T_{|F}$ et $T_{|G}$ sont injectifs (resp. surjectif).

(2) En déduire que $\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}(T_{|F}) \cup \mathrm{Sp}(T_{|G})$.

(3) Soit $\Pi : E \to E$ la projection orthogonale sur G parallèlement à F. Montrer que $\mathrm{Sp}(\Pi) = \{0, 1\}$.

Exercice 7. On considère dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer les puissances de $A - \mathrm{I}_3$, et déterminer le polynôme minimal de A.

(2) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) Montrer que A est inversible, et calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8. Soit $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme défini par

$$T(x, y, z, t) = (4x + 6y + z - 6t, -4x + 4y - 4z - 2t, -2x - 2y + z + 2t, 2x + y + 2z + t).$$

(1) On note par e_i, $1 \le i \le 4$, la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Montrer que $E = F \oplus G$ où $F = \mathrm{Vect}\{e_1 - e_3, e_2 + e_4\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{e_3, e_4\}$.

(2) Montrer que F est invariant par T.

(3) On pose $T_0 = T_{|F}$. Donner la matrice de T_0 dans la base $\{e_1 - e_3, e_2 + e_4\}$. Calculer P_{T_0}.

(4) On pose $T_1 = \Pi \circ T_{|G}$ où Π est la projection orthogonale sur G parallèlement à F. Donner la matrice de T_1 dans la base $\{e_3, e_4\}$. Calculer P_{T_1}.

(5) Donner le polynôme caractéristique de T.

Exercice 9. Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de A et déduire A^{-1}.

Exercice 10. Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Détermine les valeurs propres et le polynôme minimal de T.

(2) Établir que A est inversible et calculer son inverse.

(3) Déterminer le reste de la division de X^n, $n \in \mathbb{N}$, par M_A.

(4) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. On considère l'endomorphisme D de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $D(P) = P'$.

(1) Montrer que D est nilpotent d'indice de nilpotence $n+1$, et donner son polynôme minimal.

(2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de D.

Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par la formule

$$T(P)(X) = P(X+1) \text{ pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X].$$

(3) Montrer que $T = \mathrm{I_d} + \frac{1}{1!}D + \frac{1}{2!}D^2 + \cdots + \frac{1}{n!}D^n$.

(4) Montrer que $(T - \mathrm{I_d})^n = D^n$, et en déduire le polynôme minimal de T.

(5) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T.