Université Mohammed Premier
Faculté des Sciences d'Oujda
Département de Mathématiques

Filière : SMIA - S3

2018-2019

Algèbre 4 : *Réduction des endomorphismes*

Série N° 2 : *Diagonalisation et trigonalisation*

Exercice 1. Considérons l'endomorphisme T sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$T(M) = M + \mathrm{tr(M)I_n} \quad \text{pour tout } \mathrm{M} \in \mathcal{M}_\mathrm{n}(\mathbb{R}).$$

(1) Vérifier que la trace est une application linéaire de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que $\mathrm{Sp}(T) = \{1, n+1\}$, et déterminer les sous-espaces propres.

(3) Montrer que T est diagonalisable.

Exercice 2. Soit T un endomorphisme sur $\mathbb{R}^n$ de rang 1.

(1) Montrer que le polynôme caractéristique de T est $(-1)^n(X^n - \mathrm{tr(T)X^{n-1}})$, où tr(T) est la trace de la matrice de T dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(2) Déterminer, suivant la trace de T, le spectre de T.

(3) Montrer que T est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{tr(T)} \neq 0$.

Exercice 3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et définissons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

(2) Déduire le spectre de A suivant les valeurs de a et b.

(3) Quelles sont les valeurs de a et b pour lesquelles A est diagonalisable ?

Exercice 4. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de T.

(2) Montrer que T est diagonalisable et trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

(3) Déterminer les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $u(t)$ dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et satisfaisant les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 2x \\ y' & = & 4x - 6y + 4z + 4u \\ z' & = & 4x - 4y + 2z + 4u \\ u' & = & -4y + 4z + 2u. \end{array} \right.$$

Exercice 5. Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de T.

(2) Déterminer le polynôme minimal de T.

(3) L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

(4) Donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de T est triangulaire supérieure.

Exercice 6. Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$, avec $n \geq 1$, défini par

$$T(P)(X) = P(1-X) \quad \text{pour tout } P \in \mathbb{R}_{2n}[X].$$

(1) Montrer que T est inversible.

(2) Calculer $T(X^k)$ et $T((1-X)^k)$ en fonction des puissances de X pour tout $0 \leq k \leq 2n$.

(3) Calculer le polynôme caractéristique de T, et déduire $\mathrm{Sp}(T)$.

(4) Montrer que T est diagonalisable.

(5) Trouver une base de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ formée de vecteurs propres de T.

Exercice 7. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, avec $n \geq 2$, et T un endomorphisme inversible sur E.

(1) Montrer qu'il existe un endomorphisme diagonalisable et inversible D et un endomorphisme nilpotent N uniques tels que $T = D + N$ et $D \circ N = N \circ D$.

(2) Montrer que T est diagonalisable si, et seulement si, $N = 0$.

(3) Montrer qu'il existe un endomorphisme R tel que $T = D \circ R$ et $\det(R) = 1$.

(4) Monter que tout sous-espace propre de D est invariant par N.

(5) Déduire que $\mathrm{P}_T(X) = \mathrm{P}_D(X)$.

Exercice 8. Soit T un endomorphisme sur $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que T est trigonalisable mais non diagonalisable.

(2) Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de T est triangulaire supérieure.

(3) Calculer A^n en fonction de n.

(4) On considère les suites réelles suivantes :

$$\begin{cases} u_n &= u_{n-1} \\ v_n &= 2u_{n-1} + v_{n-1} - z_{n-1} \\ w_n &= 2u_{n-1} + 2w_{n-1} \\ z_n &= z_{n-1}. \end{cases} \quad \text{pour tout } n \geq 1 \text{ et } u_0, v_0, w_0, z_0 \in \mathbb{R}.$$

Calculer u_n, v_n, w_n et z_n en fonction de n, u_0, v_0, w_0 et z_0.

Exercice 9. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $T \in \mathscr{L}(E)$. On considère l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{L}_T : & \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ & S & \longmapsto & TS \end{array}$$

(1) Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{L}_T)$ en fonction de celle de $\mathrm{Ker}(T)$.

(2) Montrer que $P(\mathrm{L}_T) = \mathrm{L}_{P(T)}$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

(3) Montrer que L_T est diagonalisable si, et seulement si, T l'est.