Université Mohammed Premier
Faculté des Sciences d'Oujda
Département de Mathématiques

Filière : SMIA - S3

2018-2019

Algèbre 4 : *Réduction des endomorphismes*
Série N° 3 : *Réduction de Jordan*

Exercice 1. Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer P_T et M_T.

(2) En déduire $\mathrm{asc}(T - \mathrm{I_d})$ et $\dim \mathrm{Ker}(T - \mathrm{I_d})$.

(3) Donner la matrice réduite de Jordan de T.

Exercice 2. Soit T un endomorphisme de $\mathbb{R}^6$ dont la réduite de Jordan est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sans calcul, déterminer P_T, M_T et $\dim \mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I_d})$.

Exercice 3. Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer le rang de T et déduire $\dim \mathrm{Ker}(T)$.

(2) Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Ker}(T^2)$.

(3) En déduire $\mathrm{asc}(T)$, M_T et P_T.

(4) Donner une décomposition de $\mathbb{R}^5$ comme somme directe de sous-espaces cycliques de T en précisant leurs dimensions.

(5) Donner la matrice réduite de Jordan J de T relativement à la décomposition précédente.

(6) Trouver une base de $\mathbb{R}^5$ dans laquelle J soit la matrice de T.

(7) Donner le tableau de Young.

Exercice 4. Soit $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^5)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de T.

(2) Trouver les sous-espaces propres. L'endomorphisme T est-il diagonalisable ? jordanisable ?

(3) Déterminer $\mathrm{asc}(T-\mathrm{I_d})$ et $\mathrm{asc}(T+\mathrm{I_d})$. En déduire le polynôme minimal de T.

(4) Donner une matrice réduite de Jordan J pour T.

(5) Trouver une base de $\mathbb{R}^5$ dans laquelle la matrice de T est J.

(6) Résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+u-v \\ y' & = & y-2z+3u-3v \\ z' & = & -z+2u-2v \\ u' & = & x-y+z+v \\ v' & = & x-y+z-u+2v \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & 0 \\ z(0) & = & -1 \\ u(0) & = & 1 \\ v(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 5. On considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique.

(2) A est-il diagonalisable ?

(3) Jordaniser A.

(4) Résoudre le système suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & x_n \\ y_{n+1} & = & -x_n+3y_n-z_n+u_n \\ z_{n+1} & = & -x_n+y_n+z_n \\ u_{n+1} & = & 2u_n \end{array}\right. \quad \text{pour tout } n\geq 0 \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 0 \\ z_0 & = & -1 \\ u_0 & = & 1. \end{array}\right.$$

Exercice 6. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2n$, $T\in\mathscr{L}(E)$ et $a\in E$ tels que la famille $\mathscr{F}=\{a, T(a),\dots,T^{2n-1}(a)\}$ soit une base de E.

(1) Montrer que $\mathrm{M}_T=\mathrm{P}_T$, et en déduire $\mathrm{asc}(T-\lambda\mathrm{I_d})$ pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$.

(2) On suppose que $\mathrm{Sp}(T)=\{0\}$. Donner la réduite de Jordan de T.

(3) Calculer $\dim\mathrm{Ker}(T-\lambda\mathrm{I_d})$ pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$.

(4) On suppose que $\mathrm{Sp}(T)=\{-1,1\}$ et $\mathrm{asc}(T+\mathrm{I_d})=\mathrm{asc}(T-\mathrm{I_d})=n$. Donner la réduite de Jordan de T.

Exercice 7. Déterminer la suite complexe $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+4}=2u_{n+3}-2u_{n+2}+2u_{n+1}-u_n \\ u_0=1,\ u_1=-1,\ u_2=0,\ u_3=2. \end{array}\right.$$

Exercice 8. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} f^{(4)}=2f''-f \\ f(0)=1,\ f'(0)=-1,\ f''(0)=0,\ f^{(3)}(0)=1. \end{array}\right.$$