Université Mohammed Premier
Faculté des Sciences.
Département de Mathématiques

Filière : SMP-S3
Module : Analyse 3
Année Universitaire : 2018/2019.

## Série des Travaux Dirigés $N°1$

**Exercice 1.**
Calculer $\int\int_D f(x,y)dxdy$ dans chacun des cas suivants :

1. D est le triangle de sommets $O, A(1,0), B(0,1)$ et $f(x,y) = (x+y)^2$
2. D est limité par les courbes d'équation $y = \frac{1}{x}$ et $y = -4x+5$, et $f(x,y) = x^2y$,

**Exercice 2.**
Retrouver l'aire d'un disque de centre O et de rayon R, en utilisant tout d'abord les coordonnées cartésiennes, puis les coordonnées polaires.

**Exercice 3.**
Calculer,en utilisant les coordonnées polaires $\int\int_D f(x,y)dxdy$ :

1. D est la couronne limitée par les cercles de centre O et de rayons respectifs a et b $(0 < a < b)$ et $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$
2. D est l'ensemble des points du disque de centre O et de rayon 1, tels que $0 \leq y \leq x$ et $f(x,y) = (x-y)^2$

**Exercice 4.**

1. Retrouver en utilisant les coordonnées cylindriques le volume d'un cylindre de base un disque $\mathcal{D}(O;R)$ et de hauteur h
2. Retrouver en utilisant les coordonnées sphériques le volume d'une boule de centre O et de rayon R.
3. Calculer l'intégrale volumique de la fonction $f(\rho,\theta,\varphi) = \frac{1}{\rho}$ sur la sphère précédentes.

**Exercice 5.**
Calculer les intégrales triples suivantes :

1. $\Omega = \{(x,y,z) \in R^3;\ \ 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 2\},\ \ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
2. $\Omega = \{(x,y,z) \in R^3;\ \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\},\ \ f(x,y) = xyz$

**Exercice 6.**
La température de l'air au dessus du sol, en été est modélisée par la loi

$$T(x,y,z) = T_0 + T_1 e^{-\frac{z}{h}} \quad T_0 = 300°K, \ \ T_1 = 30°K, \ \ h = 3m.$$

Calculer le gradient de température au niveau du sol et à des altitudes de 1m ; 3m ; 15m.

**Exercice 7.**
Calculer $\overrightarrow{Rot}(3x^2\overrightarrow{i} - 2yz^3\overrightarrow{j} + x^2y\overrightarrow{k})$.

**Exercice 8.**
Calculer $\int_\Delta f.dl$ dans chacun des cas suivants :

1. $\Delta$ segment $(0,0)$, $(1,2)$ et $f(x,y) = x^2 + y^2$,
2. $\Delta$ : $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$ et $f(x,y) = x$

**Exercice 9.**
Calculer la longueur du segment curviligne d'équation $y = f(x)$ entre les abscisses $x_a$ et $x_b$.
Application : calculer la longueur de l'arc d'équation $y = a\cosh\frac{x}{a}$ pour $x \in [0; a]$.

**Exercice 10.**
Calculer le travail du champ de force $V(x,y) = (y^2, x^2)$ le long de la demi-ellipse supérieure orientée $\Gamma_+$ (sens trigonométrique), par la formule :

1. $\int_a^b V(\gamma(t)).\gamma^{'}(t)dt$
2. $\int_{\Gamma_+} Pdx + Qdy$

**Exercice 11.**
Soit V un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de composantes respectives

$$P(x;y;z) = xy; \quad Q(x;y;z) = \alpha x^2 + z; \quad R(x;y;z) = y.$$

1. Calculez la divergence de V.
2. A quelle condition V dérive-t-il d'un potentiel ?
3. Calculer le gradient de la fonction f définie par $f(x;y;z) = \frac{yx^2}{2} + yz + C$ (C étant une constante arbitraire).
4. En déduire le travail de V le long du segment orienté OA où $O = (0;0;0)$ et $A = (1;1;1)$.

**Exercice 12.**
Soit $\sum_+$ le cône d'équation $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ $(z > 0)$ orienté vers le haut. Soit le champ vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $V(x;y;z) = (-y, x, 1 + x + y)$

1. Calculer le flux du rotationnel de V à travers $\sum +$.
2. Retrouver le résultat en appliquant la formule de Stokes.

**Exercice 13.**
Calculer le flux du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini par $V(x;y;z) = (0;0;z)$ à travers la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.