UNIVERSITE MOHAMMED I

Faculté Des Sciences
Département De Mathématiques
Et Informatique
O u j d a

Année Universitaire 2017/18
Filière SMP, Semestre 3
Module :Analyse 3

Feuille d'exercices $N^o 3$

I. La fonction porte notée Π est définie par :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si } t \notin [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}] \end{cases}$$

Utiliser la transformée de Fourier de la fonction Π et les propriétés de l'opérateur $\mathcal{F}$ pour trouver les transformée des fonctions :

$$t \to \Pi(\frac{t-1}{2}); \quad t \to t\Pi(t); \quad t \to t^2\Pi(t)$$

II. La fonction triangle Λ est définie par :

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

(1) Déterminer la transformée de Fourier de la fonction Λ
(2) Calculez la dérivée de Λ et exprimez $\Lambda'(t)$ à l'aide de la fonction porte Π.
(3) Appliquez à l'expression précédente l'opérateur $\mathcal{F}$. En déduire la transformée de Fourier de Λ.
(4) Vérifiez que $\Lambda = \Pi * \Pi$ et retrouvez le résultat de la question précédente.

III. (1) Calculez la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$.
(2) En déduire les transformées de Fourier de

$$g(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad h(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad k(t) = \frac{1}{1+(t-a)^2}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

IV. On considère l'équation différentielle :

$$y'(t) + 3y(t) = 1 + 2e^{-5t}, \qquad y(0) = 0. \tag{1}$$

(1) Ecrire la transformée de Laplace de (1). On posera $Y = \mathcal{L}(y)$.
(2) Décomposer la fraction $\frac{3s+5}{s(s+3)(s+5)}$ en éléments simple.
(3) Déduire la solution de (1).
(4) Retrouver cette solution par la méthode habituelle (solution sans second membre+ solution particulière).

V. Résoudre l'équation différentielle :

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = t^2 - 3t + 1, \qquad y(0) = y'(0) = 0. \tag{2}$$

VI. Trouver les transformées de Laplace inverse des fonctions suivantes :
(1) $F(s) = \frac{s+2}{s^2+4}e^{-s}$ pour $t > 0$
(2) $F(s) = \frac{1}{s^2+4s+3}$ pour $t > 0$